IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE
1 MAR 1939

# ANALES

DE LA

# SOCIEDAD CIENTIFICA

# ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

DICIEMBRE 1938. — ENTREGA VI. — TOMO CXXVI

## SUMARIO

Pág.

*MATEMATICAS*:

JUAN C. VIGNAUX. — Extensiones del teorema de Abel-Stolz y sobre algunas transformaciones funcionales lineales (*Continuación*) ..... 401

*CIENCIAS NATURALES*:

KENNETH J. HAYWARD. — Hesperioidea Argentina VIII ..... 429

CARLOS RUSCONI. — Restos humanos subfósiles de Mendoza ..... 460

WALTER KNOCHE. — Una posible influencia antropógena sobre el aumento de la nubosidad ..... 471

Bibliografía por C. C. D. ..... 474

Indice de materias contenidas en el Tomo CXXVI ..... 479

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1938

# SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

## SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Philippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
Ing. Eduardo Huergo †
Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Walter Nernst
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Cristóbal M. Hicken †

## CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Diculefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V .Zappi.

## JUNTA DIRECTIVA
### (1938-1939)

| | |
|---|---|
| *Presidente* . . . . . | Ingeniero **Jorge W. Dobranich** |
| *Vicepresidente 1º* . . . . . | Doctor **Ramón G. Loyarte** |
| *Vicepresidente 2º* . . . . . | Doctor **Gonzalo Bosch** |
| *Secretario de actas* . . . . . | Ingeniero **Raúl E. Dubecq** |
| *Secretario de correspondencia*. | Doctor **Santiago Barabino Amadeo** |
| *Tesorero* . . . . . | Ingeniero **Edmundo Parodi** |
| *Pro-tesorero* . . . . . | Profesor **José F. Molfino** |
| *Bibliotecario* . . . . . | Ingeniero **Carlos A. Lizer y Trelles** |
| *Vocales* . . . . . | Doctor **Claro C. Dassen** |
| | Doctor **Alfredo Sordelli** |
| | Doctor **Juan C. Vignaux** |
| | Doctor **Jorge Magnin** |
| | Doctor **Juan Ubaldo Carrea** |
| | Doctor **Reinaldo Vanossi** |
| | Ingeniero **Carlos Posadas** |
| | Ingeniero **Mario L. Negri** |

**ADVERTENCIA.** — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

**Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires**

# EXTENSIONES DEL TEOREMA DE ABEL-STOLZ
Y
# SOBRE ALGUNAS TRANSFORMACIONES FUNCIONALES LINEALES

Por J. C. VIGNAUX

*(Continuación)*

## SOBRE ALGUNAS TRANSFORMACIONES FUNCIONALES

1. Es conocida la importancia que ha asumido en la matemática pura y aplicada, las transformaciones definidas por la integral de Laplace.

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-sz}\, \varphi(x)\, dx$$

y por la integral de Fourier

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-izx}\, \psi(x)\, dx \qquad (i^2 = -1)$$

El estudio de las propiedades de esta correspondencia ha dado lugar a numerosos y fundamentales trabajos, expuestos ya en forma sistemática en importantes obras dedicadas especialmente sobre este particular (1).

Al lado de estas transformaciones existen varias otras, mucho menos estudiadas y que, sin duda, merecen toda la atención. Tales son las llamadas transformaciones de Stieltjes, de Hankel, de Beltrami-Poincaré, de Gauss, de Hilbert, de Hamburger y otras.

En la presente memoria nos proponemos exponer varios resultados nuevos relativos a la *transformación limitada de Laplace*, definida por la relación

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx\,;$$

de la *transformación de Le-Roy*

$$g(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - xz}\, dx$$

y de la *transformación de Heine*

$$h(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x - z}\, dx\,;$$

(1) E. C. Titchmarsh: *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford 1937.

las cuales a diferencia de las anteriores, están dadas por integrales entre límites finitos. Estas cuestiones han sido tratado en un breve curso que he dado en la *Sociedad Científica Argentina* durante los meses de Septiembre y Octubre del corriente año.

En otro trabajo, en curso de publicación, haremos el estudio de la transformación de Hankel, de Stieltjes y de Gauss.

## I. — LA TRANSFORMACION DE LAPLACE LIMITADA

2. *Introducción.* — El estudio de la correspondencia funcional definida por la integral de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xz} \varphi(x)\, dx \qquad [1]$$

fué iniciado en los trabajos de H. Poincaré, que puso en evidencia su gran importancia en la integración de las ecuaciones diferenciales, y posteriormente en aquellos de M. E. Borel, fundando su notable teoría de la sumación de series divergentes, mediante la consideración de esta integral.

Luego aparecieron varias memorias de Lerch, Pragman, Hardy, Nielsen, Landau,... las cuales aportan importantes contribuciones al estudio de las propiedades de la función $f(t)$; mas fué S. Pincherle, quien dió los fundamentos de esta teoría, hoy conocida con la denominación de *transformación de Laplace*, en dos memorias ya clásicas de los *Annales de l|Ecole Normale Supérieur* (1905) y de *Acta Mathematique* (1907).

Desde entonces la teoría se desarrolla rápidamente; mostrándose particularmente fecunda en otras teorías matemáticas (series asintóticas y de facultad, funciones cuasi analíticas, ecuaciones diferenciales.....).

Una exposición magistral de los resultados fundamentales relativos a esta teoría ha sido hecha recientemente por el prof. G. Doetsch en su obra *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* Berlín, Springer, 1937; a quien se debe, por otra parte, las contribuciones más importantes sobre este particular en estos últimos años.

Una de las cuestiones más importantes de la transformación de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz} F(t)\, dt$$

es la cuestión de la inversión de esta integral, es decir, la determinación de la función $F(t)$ cuando se da la función holomorfa $f(z)$. Esta cuestión fué resuelta por Riemann con su célebre integral (1)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi_i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(z)\, e^{zz}\, dz\,.$$

En el caso de una función $f(z)$ holomorfa y nula en el infinito, se puede determinar por medio de la fórmula (2)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi_i} \int_{c} f(z)\, e^{st}\, dz$$

donde $C$ es una curva cerrada cualquiera del plano $z$ que contiene en su interior todos los puntos singulares de $f(s)$.

Otras fórmulas de inversión han propuesto Widder (3) y Tricomi (3).

Todos estos resultados se refieren muy especialmente al caso que la integral [1] se toma sobre caminos radiales del plano de la variable compleja $z$, o por caminos formados por arcos de curvas y semi-rayos.

S. Pincherle (4) consideró muy brevemente el caso de la integral

$$f(s) = \int_{\sigma} e^{-st}\, F(t)\, dt \qquad [1]$$

(1) WERKE, *De dekine Weber*, Leipzig, 1876, p. 140.

La validez de esta relación con hipótesis cada vez más general ha dado lugar a una gran cantidad de trabajos fundamentales. Una generalización de la fórmula de Riemann al caso de las *funciones poligenas* he propuesto en un trabajo anterior.

(2) S. PINCHERLE, *Sull' inversione degli integrali definite*, Mem. della Soc. Italiana delle Sc. t. 15 (1908).

Se deduce inmediatamente aplicando el conocido teorema de PINCHERLE: *Condi-Condición necesaria y suficiente para que $F(t)$ tenga una transformada $f(z)$ holomorfa y nula para $z = \infty$, es que $F(t)$ sea una función entera.* (CIBRARIO, *La trasformazione de Laplace*, Rendiconti. Instituto Lombardo (1929), p. 348); G. PÓLYA obtiene también esta fórmula de un modo muy simple en un trabajo importante: *Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen.* Math. Zeits. 29 (1928-29), pág. 578-80; Doetsch, *Loc. cit.*

(3) *The inversion of the Laplace integral...* Trans. Americ. Math. Soc., 36 (1934); F. TRICOMI, *Trasformazioni di Laplace e polinomi di Laguene*, Atti. R. Acc. N. dei Lincei, IV (1935), p. 232; VI (1935), p. 420.

(4) *Della trasformazione di Laplace e di alcune sue aplicazioni.* Mem. Istituto di Bologna, 4, S. V. 8.

donde $\sigma$ es un camino cerrado a distancia finita, $F(z)$ una función analítica de $t$. La función $f(s)$ es una trascendente entera en $s$ que denomina transformada de Laplace de $F(t)$ por el camino $\sigma$.

En la primera parte del presente trabajo nos proponemos hacer el estudio de la correspondencia funcional definida por la integral

$$f(z) = \int_0^1 e^{-zx} \varphi(x)\, dx$$

o más generales, de la forma

$$f(z) = \int_c e^{-zx} \varphi(x)\, dx$$

donde $C$ es un arco de curva *abierta*. Luego se trata el caso de dos variables

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-zx-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

En la segunda parte, se inicia el estudio de la transformada de Laplace en el dominio de la *variable compleja dual*; es decir, de la correspondencia definida por la integral convergente

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \varphi(x)\, dx$$

en donde: $z = x + ky$, siendo $k$ la *unidad imaginaria dual* y $f(z)$ una función compleja de la variable dual $z$. Luego se considera el caso de las integrales dobles convergentes

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-wy} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Finalmente en la tercera parte se estudia una nueva cuestión: el problema de los *momentos factoriales*.

3. *Definiciones.* — Dada una función $\varphi(x)$ acotada e integrable Lebesgue en el intervalo (0,1), la integral definida

$$f(z) = \int_0^1 e^{-tz} \varphi(t)\, dt$$

define en todo el plano de la variable compleja $z = x + iy$, una función compleja de $z$ que llamaremos la *transformada limitada* de Laplace de la función $\varphi(t)$ o, simplemente, *transformada limitada* $(L_1)$, e indicaremos con la notación

$$f(z) = L_1[\varphi(x)]$$

A las funciones $\varphi(x)$ y $f(z)$ las denominaremos *función generatriz* $L_1$ y *función determinante* $L_1$ respectivamente.

*La función $f(z)$ es holomorfa en todo el plano.* En efecto; sea $C$ un contorno cerrado cualquiera del plano de la variable $z$ ; se tiene

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C dz \int_0^1 e^{-zx}\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)\,dx \int_C e^{-zx}\,dz,$$

y puesto que $e^{-zx}$ es función holomorfa de $z$, resulta por el teorema de Cauchy

$$\int_C e^{-zx}\,dz = 0$$

por tanto

$$\int_C f(z)\,dz = 0;$$

luego, en virtud del teorema de Morera, la $f(z)$ es holomorfa en el interior de $C$, por tanto en todo el plano.

4. *Desarrollo tayloriano.* — Puesto que

$$e^{-zx} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(xz)^n}{n!}$$

y como la convergencia es uniforme para todo $z$ del plano y $x$ del intervalo (0,1); se tiene

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz}\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)\left(\sum_0^\infty (-1)^n \frac{(xz)^n}{n!}\right)dx$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^n}{n!}\int_0^1 x^n\,\varphi(x)\,dx$$

Es decir

$$f(z) = \sum_0^\infty (-1)^n a_n \frac{z^n}{n!} \qquad [2]$$

donde

$$a_n = \int_0^1 x^n\,\varphi(x)\,dx\ .$$

La función $f(z)$ es, por tanto, una función trascendente entera del llamado *tipo exponencial* (1). Constituyen las funciones *asociadas* de M. Borel de gran importancia en su teoría de la sumabilidad de las series divergentes.

La sucesión

$$a_n = \int_0^1 x^n\,\varphi(x)\,dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad [1]$$

está perfectamente determinada cuando se da la función generatriz $\varphi(x)$. El problema recíproco que consiste en *determinar una función única* $\varphi(x)$ *que satisfaga a la condición* [1] *cuando se da la sucesión de números* $\{a_n\}$, llamaremos *problema de los momentos de Le-Roy* (2) Hausdorff.

(1) POLYA: *Math. Anal.* t. 89, p. 186; R. PALEY y N. WIENER, *Fourier Transforms in the complex domain*, Americ. Math. Soc. V. XIX (1934) pág. 68. (Véase en particular el teorema X, pág. 12).

(2) Esta cuestión aparece por primera vez, en el problema tratado por M. Le-Roy, de la representación de una función analítica por integrales del tipo

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\,.\,A(x, z)\,dx.$$

F. Hausdorff y Poyla [1] han estudiado esta cuestión fundamental en el caso más general

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\, X\,(u) \,, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde la integral está tomada en el sentido de Stieljes. L. Amoroso ha dado la condición necesaria y suficiente para que este problema de los momentos sea resuelto.

La solución de este problema nos permite representar toda función del tipo exponencial, mediante una integral de Laplace limitada.

En efecto; sea

$$f\,(z) = \sum_0^\infty (-1)^n \, a_n \frac{z^n}{n!}$$

una función del tipo exponencial, y sea $\varphi\,(x)$ la solución de los momentos correspondientes a la sucesión

$$a_n = \int_0^1 x^n \, \varphi\,(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

se tiene

$$f\,(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \int_0^1 x^n \, \varphi\,(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \varphi\,(x) \left( \sum_0^\infty \frac{(xz)^n}{n!} \right) dx$$

es decir

$$f\,(z) = \int_0^1 e^{-xz} \, \varphi\,(x)\, dx$$

5. *Propiedades.* — I. *Si la función* $\varphi\,(x)$ *tiene por transformada* $L_1$ *a* $f\,(z)$, *la función* $x^n \, \varphi\,(x)$ *tiene por transformada* $L_1$ a $(-1)^n f^{(n)}\,(z)$.

En efecto; sea

$$f\,(z) = \int_0^1 e^{-xz} \, \varphi\,(x)\, dx,$$

(1) *Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Zeits* (9), (1921), 74, 280; *Math. Z.* 1920, p. 177.

*Ann. Toulouse* (2) (2) 1900.

como la función $f(z)$ compleja de la variable $z$ es holomorfa, sus derivadas sucesivas existen y se obtienen derivando bajo signo integral; es decir

$$f'(z) = \int_0^1 e^{-zx}(-x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$f''(z) = \int_0^1 e^{-zx}\,x^2\,\varphi(x)\,dx,$$

en general

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^1 e^{-zx}\,x^n\,\varphi(x)\,dx.$$

II. Sea

$$f(z) = \int_0^1 e^{-zx}\,\varphi(x)\,dx$$

y supongamos que $\varphi(z)$ sea derivable en (0,1), entonces la integración por parte nos da

$$f(z) = -\frac{1}{z}[\varphi(1)\,e^{-z} - \varphi(0)] + \frac{1}{z}\int_0^1 e^{-zx}\,\varphi'(x)\,dx$$

de donde

$$z f(z) = \int_0^1 e^{-zx}\,\varphi'(x)\,dx + \varphi(0) - \varphi(1)\,e^{-z}$$

Si la $\varphi(x)$ admite derivadas hasta el orden $n$, se puede escribir

$$z^2 f(z) = \int_0^1 e^{-zx}\,\varphi''(x)\,dx + [\varphi(1)\,z - \varphi'(1)]\,e^{-z} + [\varphi(0)\,z + \varphi'(0)]$$

y en general, resulta la expresión

$$z^n f(z) = \int_0^1 e^{-zx}\,\varphi^{(n)}(x)\,dx + P_{n-1}(z)\,e^{-z} + Q_{n-1}(z)$$

donde $P_{n-1}(z)$ y $Q_{n-1}(z)$ son dos polinomios en $z$ de grado $n-1$.

De aquí resulta la propiedad: *Si la generatriz* $\varphi(x)$ *es derivable en el intervalo* (0,1) *la determinante* $L_1$ *de* $\varphi^{(n)}(x)$ *es igual a la determi-*

*nante* $f(z)$ *de* $\varphi(x)$ *multiplicada por su variable* $z$, *salvo un término aditivo de la forma*

$$P_{n-1}(z)\, e^{-z} + Q_{n-1}(z)\,.$$

Vamos a demostrar las propoiciones siguientes relativas a la suma, producto y cociente de dos transformadas $L$ (0,1).

III. Consideremos las transformadas

$$f(z) = \int_0^1 e^{-zx}\, \varphi(x)\, dx, \qquad [1]$$

$$g(z) = \int_0^1 e^{-zx}\, \psi(x)\, dx \qquad [2]$$

Puesto que

$$f(z) \pm g(z) = \int_0^1 e^{-zx}\, \Phi(x)\, dx$$

donde

$$\Phi(x) = \varphi(x) \pm \psi(x)$$

resulta:

*La suma* (diferencia) *de dos transformadas* $L_1$, *es una transformada* $L_1$, *cuya generatriz es la suma* (diferencia) *de las generatrices de los primeros.*

IV. Si multiplicamos las integrales [1] y [2] resulta

$$f(z)\, g(z) = \int_0^1 e^{-zx}\, \varphi(x)\, dx \int_0^1 e^{-zx}\, \psi(y)\, dy =$$

$$= \iint_D e^{-z(x+y)}\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy$$

la integral doble está tomada en el cuadrado $D$ cuyos vértices son: (0,0), (0,1), (1,1) y (0,1).

Por otra parte,

$$\iint_D e^{-z(x+z)}\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = 2 \iint_T e^{-(x+y)}\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy.$$

donde $T$ es el triángulo $O\,(0,0)$, $A\,(1,0)$, $B\,(0,1)$; y haciendo el cambio de variables

$$x + y = \xi \quad , \quad y = \xi\,\eta$$

es decir

$$x = \xi\,(1 - \eta) \quad , \quad y = \xi\,\eta.$$

Al dominio $T$ del plano $xy$, corresponde en el plano $\xi$, $\eta$ un cuadrado $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ y como el jacobiano de la sustitución vale: $\tau = \xi$; se tiene entonces

$$\iint_T e^{-(x+y)}\,\varphi\,(x)\,\psi\,(y)\,dx\,dy = \iint_R e^{-\xi z}\,\xi\,\varphi\,[\xi\,(1-\eta)]\,\psi\,(\xi\,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \int_0^1 e^{-\xi z}\,\xi\,d\,\xi \int_0^1 \varphi\,[\xi\,(1-\eta)\,\psi\,(\xi\,\eta)\,d\,\eta$$

Poniendo: $\xi = t$, se puede escribir

$$\iint_T e^{-(x+y)z}\,\varphi\,(x)\,\psi\,(y)\,dx\,dy = \int_0^1 e^{-tz}\,dt \int_0^t \varphi\,(t-y)\,\varphi\,(y)\,dy$$

por tanto

$$f\,(z)\;\;y\,(z) = \int_0^1 e^{-tz}\,\Phi\,(t)\,dt$$

donde

$$\Phi\,(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \varphi\,(t-y)\,\psi\,(y)\,dy. \qquad [3]$$

Luego: *El producto de dos transformadas $L_1$ es una transformada $L_1$, que tiene como determinante $L_1$ el producto de las determinantes de sus factores y cuya generatriz $\varphi\,(x)$ está dada por la relación* [3].

V. Llamaremos *cociente* de las transformadas [1] y [2]

$$\frac{g\,(z)}{f\,(z)} = \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{-zx}\,\varphi\,(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 e^{-zx}\,\psi\,(x)\,dx}$$

a toda transformada $L_1$

$$F(z) = \int_0^1 e^{-xz}\,\omega(x)\,dx,$$

tal que multiplicada por la $g(z)$ sea igual a la $f(z)$; es decir

$$\int_0^1 e^{-xz}\,\varphi(x)\,dx = \int_0^1 e^{-xz}\,\varphi(x)\,dx \cdot \int_0^1 e^{-xz}\,\omega(x)\,dx$$

Haciendo el producto del segundo miembro, la relación anterior se puede escribir

$$\int_0^1 e^{-xz}\,\varphi(x)\,dx = \int_0^1 e^{-xz}\left[\frac{1}{2}\int_0^x \psi(x-y)\,\omega(y)\,dy\right]dx$$

de donde resulta, según un conocido teorema de Lerch-Vitali

$$(\mu). \qquad 2\,\varphi(x) = \int_0^x \psi(x-y)\,\omega(y)\,dy,$$

ecuación integral de Volterra de segunda especie la cual nos determina la función incógnita $\omega(y)$ generatriz del cociente. El *núcleo* de esta ecuación: $\psi(x-y)$ es del *tipo permutable* [1].

Por tanto: *el cociente de dos transformadas $L_1$ es una transformada $L_1$ que tiene como determinante $L_1$ el cociente de sus términos y cuya generatriz se determina mediante la ecuación integral de Volterra* ($\mu$).

6. *El problema de inversión.* — Dada la correspondencia entre $f(z)$ y $\varphi(z)$, definida por la relación

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz}\,\varphi(x)\,dx \qquad [1]$$

[1] V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales...* (Gauthier-Villars, París, 1923), p. 52 y 150: Volterra (V) et Peres (J), *Lecons sur la composition et la fonctions permutables* (Gauthier-Villars, 1924): y *Théorie générale des Fonctionnells.* T. I, Gauthier-Villars, París, 1936.

Este tipo de ecuación integral, la designa el prof. G. Doetsch «*Faltung typus*».

el problema de la inversión consiste en determinar la función $\varphi(x)$ cuando se da la $f(z)$. Se trata, entonces, de resolver la ecuación integral de primera especie [1] donde $f(z)$ es la función dada y $\varphi(x)$ la función incógnita.

La solución de esta importante cuestión se puede obtener mediante las funciones fundamentales de E. Schmit y los métodos conocidos de resolución de tales ecuaciones (1).

Recientemente el prof. Picone ha propuesto, una fórmula de inversión de integrales de este tipo (*R. Acc. Lincei*, 6, 21 (1935).

7. *Integral doble.* — El estudio de las propiedades de la correspondencia funcional definida por la integral doble de Laplace

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad [1]$$

y de la inversión, nos hemos ocupado en otra oportunidad (2). Vamos a estudiar aquí, la integral doble

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-zx-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad [2]$$

donde $z$ y $w$ son dos variables complejas independientes.

Dada la función real $\varphi(x, y)$ de dos variables reales $x$ e $y$ acotada e integrable en el cuadrado $(0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1)$ (función generatriz), la integral doble [2] define una función $f(z, w)$ de dos variables complejas: $z = \xi_1 + i\,\xi_2$, $w = \eta_1 + i\,\eta_1$ (función determinante.

Representemos el punto complejo $(z, w)$ por un punto real del $S_4$ mediante sus coordenadas $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$, respecto a un sistema cartesiano-rectangular. *La función $f(z, w)$ es holomorfa en toda región de $S_4$.*

(1) Véase: E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, T. III, París (1905).

(2) J. C. Vignaux, *Sobre la teoría de las funciones determinantes de dos variables*, Soc. Cient. Argentina, t. CXII, p. 357 (1931); *Sulla transformazione di Laplace di due variabili* (R. Accademia N. dei Lincei (Roma) 17 ag. 1933; *Un teorema sulle integrali doppie di Laplace* (R. Acc. N. dei Lincei, junio 1933) y *Bull. Soc. Royale des Sc. di Liege*, nº 5 (1933).

En efecto; si $\sigma$ es una superficie cerrada bilateral de $S_4$, se tiene

$$\iint_\sigma f(z, w)\, dx\, dw = \iint_\sigma dx\, dw \int_0^1\int_0^1 e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \varphi(x, y)\, dx\, dy \iint_\sigma e^{-xz-yw}\, dz\, dw$$

y como la función

$$e^{-xz-yw}$$

es holomorfa respecto a $z$ y $w$ para todo $(0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1)$, resulta por el teorema de Cauchy-Poincaré

$$\iint_\sigma e^{-xz-yw}\, dz\, dw = 0$$

por tanto,

$$\iint_\sigma f(z, w)\, dz\, dw = 0$$

luego por el teorema de Morera-Volterra, la función

$$f(z, w)$$

es holomorfa en el dominio de $S_4$ limitado por $\sigma$.

8. El desarrollo tayloriano se obtiene del siguiente modo. Puesto que

$$e^{-xz-yw} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n} \frac{(z\,x)^m}{m!} \frac{(y\,w)^m}{n!}$$

uniformemente para $(x, y$ de $0,1)$ y $(z, w)$ de $S_4$; se tiene

$$f(z, w) = \int_0^1\int_0^1 \varphi(x, y) \left[\sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n} \frac{(x\,z)^m}{m!} \cdot \frac{(y\,w)^n}{n!}\right] dx\, dy$$

$$= \sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!} \int_0^1\int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

Si ponemos

$$a_{m\,n} = (-1)^{m+n} \int_0^1 \int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy$$

la igualdad anterior se puede escribir

$$f\,(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,\,n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!}$$

y esta serie doble converge en todo punto de $S_4$. La $f\,(z, w)$ es una trascendente doble del tipo exponencial que tiene importancia en la sumación de Borel, de las series dobles.

9. Las derivadas parciales sucesivas de la función $f\,(z, w)$ se obtienen derivando la función dentro del signo integral doble, como en el caso de una variable. Resulta entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\,(-1)\, x\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\,(-1)\, y\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy$$

En general

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n} = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, x^n\, \varphi\,(n, y)\, dx\, dy$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial w^m} = (-1)^m \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, y^m\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy.$$

y

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m\, \partial w^n} = (-1)^{m+n} \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, x^n\, y^m\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Sea $f\,(z, w)$ una función compleja del tipo exponencial

$$f\,(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m\,n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!} \qquad [1]$$

para la cual se tiene

$$a_{m,\,n} = (-1)^{m+n}\int_0^1\int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy \qquad (m, n = 0.\ 1, 2, \ldots)$$

enconces la función dada [1] se puede representar en todo el plano por una integral limitada de Laplace; puesto que

$$f\,(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,\,n}\, \frac{z^m}{m!}\, \frac{w^n}{n!} =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \varphi\,(x, y)\left(\sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n}\, \frac{(x\,z)^m}{m!} \cdot \frac{(y\,w)^n}{n!}\right.$$

es decir

$$f\,(z, w) = \int_0^1\int_0^1 \varphi\,(x, y)\, e^{-xz-yw}\, dx\, dy.$$

Se plantea aquí, de modo natural, un problema de los momentos dobles análogo al resuelto por Hausdorff; problema que nos limitaremos a enunciar.

*Dada la sucesión doble* $a_{m,\,n}$ *determinar una función única* $\varphi\,(x, y)$ *de las variables* $x$ *e* $y$ *tal que*

$$a_{m,\,n} = \int_0^1\int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy \qquad (n, m = 0, 1, \ldots)$$

10. *Propiedades.* — Consideremos las dos integrales dobles

$$f\,(z, w) = \int_0^1\int_0^1 e^{-xz-yw}\, \varphi\,(x, y)\, dx\, dy \qquad [1]$$

$$g\,(x, y) = \int_0^1\int_0^1 e^{-xy-yw}\, \psi\,(x, y)\, dx\, dy \qquad [2]$$

se tienen

$$F\,(z, w) = f\,(z, w) \pm g\,(x, y) = \int_0^1\int_0^1 e^{-xz-yw}\, \omega\,(x, y)\, dx\, dy$$

donde

$$\omega\,(x, y) = \varphi\,(x, y) \pm \psi\,(x, y)$$

es la generatriz de la determinante $F\,(z, w)$.

Si multiplicamos las integrales dobles [1] y [2], resulta

$$f\,(z)\,.\,g\,(z) = \iint\!\!\iint_D e^{-z\,(x+y)\,-\,w\,(u+v)}\, \varphi\,(x, y)\, \psi\,(u, v)\, dx\, dy\, du\, dv.$$

Esta integral múltiple, se transforma en la siguiente (1)

$$f(z) \cdot g(z) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-zs-vw} \Phi(x, y)\, dx\, dy$$

donde

$$\Phi(x, —) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \varphi(z - t, y - u)\, \psi(t, u)\, dt\, du$$

Esta función es el *producto integral* de dos integrales dobles [1] y [2].

## II. La transformacion de Laplace de la variable compleja dual

El estudio de las funciones monógenas $f(z)$ de una variable compleja dual

$$z = x + ky$$

donde $k$ representa la *unidad imaginaria dual* (1) ($k^2 = 0$), fué iniciada por E. Study en su obra (*Geometrie der Dinamen*).

Nos proponemos introducir aquí la noción de integral de Laplace de variable compleja dual. Estas integrales definen en todo su campo de convergencia, una función holomorfa dual.

Llamaremos integral de Laplace en el campo de la variable compleja dual, a la integral

$$\int_0^\infty e^{-tz}\, \varphi(t)\, dt \qquad [1]$$

donde $t$ es una variable real ($t \geq 0$) y $\varphi(t)$ una función real de $t$, o, más general, una función compleja dual de la variable real $t$

$$\varphi(t) = \psi_1(t) + k\, \psi_2(t).$$

Esta integral define en todo el conjunto de los valores de $z$ que resulta convergente, una función

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, \varphi(t)\, dt$$

(1) J. C. Vignaux, *Sobre integrales de Laplace y de Stieljes asintóticas*. Anales de la Soc. Científica Argentina: t. CXXVI, 1938, pág. 14.

de la variable dual: $z = x + ky$ que llamaremos la *transformada de Laplace dual.*

El estudio de esta correspondencia se simplifica notablemente, si se tiene en cuenta la siguiente expresión para la relación [1]. Puesto que

$$e^{-tz} = e^{-tx} \cdot e^{-kty} = e^{-tx}(1 - kty)$$

la [1] se puede escribir

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz} \varphi(t)\, dt + ky \int_0^\infty e^{-tz} (-t) \varphi(t)\, dt \qquad [2]$$

donde

$$\int_0^\infty e^{-tz} \varphi(t)\, dt \quad [3] \quad , \quad \int_0^\infty e^{-tz} (-t) \varphi(t)\, dt \qquad [4]$$

son integrales de Laplace de la variable real $x$.

El estudio de la región de convergencia de la transformada [1] queda así reducido al estudio de la convergencia de las integrales [3] y [4] de la variable real $x$; y su determinación se puede deducir del siguiente modo:

Sea $\lambda$ la abscisa de convergencia de la integral de Laplace [3], ésta se puede determinar por la fórmula de Fugiwara (1).

$$\lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_0^t \varphi(u)\, e^{-u^2 - t^2}\, du \right|}{t}$$

(1) Existen otras fórmulas que permiten determinar $\lambda$: por ejemplo la de Landau-Pincherle.

$$\text{Si } \lambda \geq 0 \quad \lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\lg \left| \int_0^t \varphi(u)\, du \right|}{t} \quad , \quad \lambda < 0 \quad \lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\left| \int_t^\infty \varphi(u)\, du \right|}{t} \; ;$$

la fórmula de Kojima

$$\lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_{[t]}^t \varphi(u)\, du \right|}{t}$$

que comprende a la de Landau-Pincherle.

Cuando la función $\varphi(t)$ es entera M. Borel da la fórmula simple

$$\lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log |\varphi(t)|}{t} \, .$$

Como la abscisa de convergencia $\lambda'$ de la integral [4] es: $\lambda' \leq \lambda$(1); resulta entonces que las integrales de Laplace [3] y [4] convergen en el semi-eje real: $x > \alpha$, y definen las funciones *determinantes reales* $g(x)$ y $h(x)$

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(x)\, dt \quad , \quad h(x) = g'(a) = \int_0^\infty e^{-xt} (-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

que admiten derivadas de todos los órdenes para todo $x > \lambda$.

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t)\, dt.$$

La relación [2] nos permite concluir que la integral dual de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t)\, dt$$

converge en el semi-plano: $R(z) > \lambda$. Esta región llamaremos *semiplano de convergencia*, y al *número* $\lambda$, *la abscisa de convergencia de la misma.*

En todo este dominio esta integral define una función $f(z)$ de la variable compleja dual continua, de la forma

$$(\alpha) \qquad f(z) = g(x) + k\, y\, g'(x);$$

y puesto que las funciones $g(x)$ y $g'(x)$ son derivables para $x > \lambda$, la función $f(z)$ es *holomorfa dual* en todo su semi-plano de convergencia. Además sus derivadas sucesivas se determinan por la relación

$$f^{(n)}(z) = g^{(n)}(x) + k\, y\, g^{(n+1)}(x),$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Se puede probar también esta propiedad del siguiente modo: Consideremos en el semiplano $R(z) > \lambda$ una curva cerrada $C$ cuyo

(1) Cibrario, *Loc. cit.;* Doetsch, *loc. cit.*

contorno no tenga ningún punto común con la recta de convergencia $x = \lambda$; integrando $f(z)$ sobre $C$ resulta

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C dz \int_0^\infty e^{zt}\,\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty \varphi(t)\,dt \int_C e^{-zt}\,dz,$$

y como la función: $e^{-zt}$ es holomorfa dual su integral sobre $C$ es nula (1); de donde resulta

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

y por tanto la $f(z)$ es holomorfa dual.

12. *Propiedades.* — Consideremos las transformadas de Laplace dual

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi(t)\,dt = g(x) + ky\,g'(x) \qquad [1]$$

$$f_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi_1(t)\,dt = g_1(x) + ky\,g_1'(x). \qquad [2]$$

De aquí resulta inmediatamente

$$f(z) + f_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\,\psi(t)\,dt$$

donde

$$\psi(t) = \varphi(t) + \varphi_1(t).$$

Hagamos el producto de las integrales (1) y (2), se tiene

$$[1]\quad f(z)\,.\,f_1(z) = g(x)\,g_1(x) + ky\,[g(x)\,g_1'(x) + g_1(x)\,g'(x)]$$

$$= g(x)\,g_1(x) + ky\,D\,[g(x)\,.\,g_1(x)].$$

(1) J. C. VIGNAUX, *Sur les fonctions poliggènes d'une et de plusieurs variables duales*..... Rendic. della R. Accad. N. del Lincei, V. XXVII, p. 21, giugno 1938 (I Nota; Contribución al Estudio de las Ciencias, V. I E 3, 1936 y V. I E. 5, 1938.

Aplicando el teorema de Doetsch relativo al producto de dos integrales de Laplace, se tiene

$$g(x)\, g_1(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \left[ \int_0^t g(u)\, g_1(t-u)\, du \right] dt$$

De aquí se deduce

$$D\,[g(x)\,.\,g_1(x)] = \int_0^\infty e^{-xt} \left[ (-t) \int_0^t g(u)\, g_1(t-u)\, du \right] du$$

por tanto la [1] resulta

$$f(z)\, f_1(z) = \int_0^\infty e^{-xt} \left[ \int_0^t g(u)\, g_1(t-u)\, du \right] dt +$$

$$+ ky \int_0^\infty e^{-xt} \left[ -t \int_0^t g(u)\, g_1(t-u)\, du \right] dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-xt} (1 - k\,y\,t) \left[ \int_0^t g(x)\, g_1(t-u)\, du \right] dt$$

y teniendo presente la relación

$$e^{-xt}(1 - k\,y\,t) = e^{-xt}\,.\,e^{-k\,y\,t} = e^{-t(x+ky)}$$

resulta finalmente

$$f(z)\,.\,f_1(z) = \int_0^\infty e^{-ts}\, \psi(t)\, dt \qquad [1]$$

donde

$$\psi(t) = \int_0^t g(u)\, g_1(t-u)\, dt = g(t)\, g_1(t)$$

es el producto integral de $g(t)$ y $g_1(t)$.

La relación [1] constituye la extensión del teorema de Doetsch a las integrales de Laplace duales.

Sea

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-ts}\, \varphi(t)\, dt = g(x) + ky\, g'(x). \qquad [1]$$

en un cierto semi-plano de convergencia, y supongamos que su generatriz $\varphi(t)$ sea derivable en el intervalo $(0, \infty)$.

La transformada de $\varphi'(t)$ será

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-tx}\,(1 - kyt)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx}\,\varphi'(t)\,dt + ky\int_0^\infty (-t)\,e^{-tx}\,\varphi'(t)\,dt$$

Aplicando a la primera integral de Laplace que figura en el segundo miembro la relación bien conocida,

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\varphi'(t)\,dt = x\,g(x) - \varphi(0)$$

la igualdad anterior se puede escribir

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\varphi'(t)\,dt = x\,g(x) - \varphi(0) + ky\,D_x\,[x\,.\,g(x)]$$

$$= x\,g(x) + ky\,[g(x) + x\,g'(x)] - \varphi(0)$$

$$= (x + ky)\,(g(x) + ky\,g'(x) - \varphi(0).$$

luego

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\varphi'(t)\,dt = z\,f(z) - \varphi(0)$$

relación análoga a la de las funciones determinantes ordinarias.

Consideremos nuevamente la relación 1] y veamos cuál es la transformada dual de la generatriz: $t\,\varphi(t)$. Se tiene

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,t\,\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-tx}\,(1 - kyt).\,t\,\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-tx}\,t\,\varphi(t)\,dt + ky\int_0^\infty (-t)\,t\,\varphi(t)\,dt$$

Pero se tiene, según una relación conocida

$$-g'(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\,t\,\varphi(t)\,dt$$

$$g''(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\,(-t)\,t\,\varphi(t)\,dt$$

luego

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t\, \varphi(t)\, dt = -g'(x) + ky\, g''(x)$$
$$= -f'(z)$$
$$= \frac{d}{dz}\int_0^\infty e^{-st}\, t\, .\, \varphi(t)\, dt\ ;$$

propiedad ésta análoga a las de las funciones determinantes ordinarias.

13. *Integral doble de Laplace.* — Sea la integral

$$f(z, z') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-uz-vz'}\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$

donde $\varphi(u, v)$ es una función dada de las variables reales en $u$ y $v$; $z = x + ky$ y $z' = x' + ky'$, dos variables complejas duales independientes.

Puesto que

$$e^{-uz-vz'} = e^{-ux}\,(1 - k\,u\,y)\,.\,e^{-vx'}\,(1 - k\,v\,y')$$
$$= e^{-ux-vx'}\,[1 - k\,(u\,y + v\,y')]$$

la relación [1] se puede escribir

$$f(z, z') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\, \varphi(u, v)\, du\, dv) + \qquad [1]$$
$$+ ky \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\,(-u)\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$
$$+ ky' \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\,(-v)\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$

Sea $\lambda$ y $\lambda'$ un sistema de abscisas asociadas de convergencia de la integral doble de Laplace

$$g(x, x') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\, \varphi(u, v)\, du\, dv;$$

las otras dos integrales dobles que figuran en el segundo miembro de la [1] convergen también en la misma región; se tiene

$$g'_x(x, x') = \int_0^x \int_0^\infty e^{-ux-vx'} (-u)\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$

$$g'_{x'}(x, x') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'} (-v)\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$

luego la [1] se puede escribir

$$f(z, z') = g(x, x') + k\, y\, g'_x(x, x') + k\, y'\, g'_{x'}(x, x'). \qquad [2]$$

Como las funciones $g(x, x')$, $g'_x(x, x')$ y $g'_{x'}(x, x')$ son holomorfas en los semiejes asociados: $(x > \lambda,\ x' > \lambda')$, la función $f(z, z')$ definida por la expresión [2] es función *holomorfa dual* de las variables *complejas duales*, en los *semiplanos asociados*

$$R(z) > \lambda \quad , \quad R(z') > \lambda'$$

Si ponemos

$$\overline{\lim_{t+u\to\infty}} \frac{\log e^{-pu} \left| \int_0^t \int_0^u e^{(x^2-t^2)+(y^2-u^2)}\, dx\, dy \right|}{t+u} = \psi(p)$$

entonces

$$\lambda = \psi(p) \quad , \quad \lambda' = p + \psi(p) \quad (-\infty < p < \infty)$$

es un sistema de abscisas asociadas de convergencia.

Las propiedades de esta integral doble se deducen a partir de la expresión [2] y razonando como en el caso de una variable.

### III. SOBRE MOMENTOS FACTORIALES

14. El célebre problema llamado de los « momentos » de Stieltjes. consiste en determinar una función única $f(z)$ real e integrable en en el intervalo $(0, +\infty)$, tal que

$$a_n = \int_0^\infty x^n f(x)\, dx$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

cuando se da la sucesión $a_n$ de números reales. Esta cuestión que se presenta en fundamentales capítulos de la matemática (sumación de series, funciones cuasianalíticas, Cálculo de Probabilidades,...) ha recibido una solución completa en los trabajos de Stieltjes (1), Borel (2), Le Roy (3), Hardy (4), Riesz (5) y Carleman (6).

El caso de límites finitos

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

fué planteado por Le-Roy (7) y Hadamard, con motivo del problema de la prolongación analítica de funciones dadas por su desarrollo tayloriano, mediante integrales definidas, y resuelto por Ausdorff (8). Finalmente, el caso

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx$$

fué tratado y resuelto por Hamburger (9) y Pòlya (10).

El problema de los momentos ha sido extendido al campo complejo

$$a_n = \int_c z^n f(z)\, dz \qquad (n\ 0, 1, 2, \ldots)$$

donde $c$ es un arco *de curva abierta*. L. Amoroso (12) ha enunciado la

(1) «*Recherches sur les fractions continues*». Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse. 1894.

(2) «*Mèmoir sur les series divergentes*». Annales Sc. de l'école normale suferiense (1899).

(3) «*Sur les series divergentes*». Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse. (1900).

(4) *Messenger of Math.* (1917).

(5) «*Sur le problème des moments*. Arkif för matematik. T. 17. (1923).

(6) «*Les fonctions quasianalytiques*». (1926).

(7) *Loc. cit.*

(8) F. Hausdorff, F. - *Momentfunktionen, Math. Zeits*, p. 286.

(9) Hambruger, - *Math. Zeits*, 4 1919. p. 186, 212; *Math. Ann.* T. 81. (1920).

(10) G. Polya, *Math. Zeits*, 1920, p. 177.

condición necesaria y suficiente para que el problema de los momentos sea resuelto (1).

Cuando la curva $c$ es cerrada, la solución es inmediata y ella está contenida en los resultados fundamentales de Cauchy sobre las series de potencias.

Aquí me propongo plantear un nuevo problema que llamaremos de los *momentos factoriales* y que consiste en la cuestión siguiente:

*Dada la sucesión* $\{a_n\}$ *y una curva c del plano de la variable compleja* $z$, *determinar una función holomorfa única* $f(z)$ *que verifique la condición*

$$a_n = \int_C z^{(n} f(z)\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde

$$z^{(n} = z(z+1)\ldots(z+n-1)$$

*es la potencia factorial* de $z$.

Damos aquí, una solución simple de esta cuestión, en el caso que la curva $C$ sea cerrada, mediante una serie de facultad convergente.

16. Momentos de Cauchy. — Sea $f(z)$ una función holomorfa en los puntos exteriores de un dominio $D$, limitado por la curva cerrada $C$ que contiene el origen en su interior, y nula en el infinito, la integral de Cauchy nos da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\, dt}{z-t}, \qquad [1]$$

para todo punto $z$ exterior del dominio $D$.

Desarrollando el núcleo $\frac{1}{z-t}$ en serie de potencias de $\frac{1}{z}$; se tiene

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{z}} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{z^{n+1}}$$

(1) *Reud, della R. Acc. dei Lincei*, V. XIX (1920); *Bolletino della U. Mat. Italiana*. N. 2 (1924).

y sustituyendo en la relación [1] resulta

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^{n+1}} \qquad [2]$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c t^n f(t)\, dt \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y la serie [2] converge para todo $z$ tal que

$$|z| > R = máx\, |t|$$

cuando $t$ recorre el contorno $c$.

La sucesión

$$c_n = \int_c t^n f(t)\, dt = 2\pi i\, a_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

son los *momentos de la función* $f(z)$ *sobre el contrno cerrado* $c$.

Si se da ahora la sucesión $\{c_n\}$ y se fija el contorno cerrado $c$ y además se verifica que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = R$$

sea *finito* y $R \geq$ máx $|t|$ sobre $c$ ; entonces la función $f(z)$ está perfectamente determinada por su desarrollo convergente

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

para todo $|t| > R$. Como la función $f(z)$ así determinada es única, el problema de los momentos de Cauchy queda resuelto.

17. Momentos factoriales. — Consideremos nuevamente la integral de Cauchy [1]; su núcleo $\frac{1}{z-t}$ se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z(z+1)} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} +$$

$$+ \frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \cdot \frac{1}{z-t}$$

Sustituyendo este valor en la [1], se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{z-t} =$$

$$= \sum_0^n \frac{1}{z\,(z+1)\ldots(z+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C t\,(t+1)\ldots(t+n-1)\,f(t)\,dt$$

donde

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t\,(t+1)\ldots(t+n)}{z\,(z+1)\ldots(z+n)}\,\frac{f(t)}{z-t}\,dt.$$

Es decir,

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z\,(z+1)\ldots(z+n)} + R_n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\,t^{(n}\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pongamos ahora

$$\sigma = máx\ R\ (t)$$

cuando el punto $t$ recorre el contorno C. Para todo punto $z$ del semi plano: $R\ (z) \geq \sigma + \delta$, $(\delta > 0)$ se tiene

$$|R_n| < \frac{1}{2\pi}\,\frac{M.l}{\delta}\cdot \prod_0^n \left|\frac{t+n}{z+n}\right|$$

donde $M$ es el extremo superior del módulo de $f(z)$ y $l$ la longitud del contorno C.

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

luego la función $f(z)$ está representada por la serie de facultad

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{A_n}{z\,(z+1)\ldots(z+n)}$$

(1) Una aplicación interesante puede verse: Walsch, *Comp. Rendus*, Nº 1, 1924.

convergente en el semiplano: $R\ (z) > \sigma$ y cuyos coeficientes están dados por las integrales

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C t^{(n} f\,(t)\,dt \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

De aquí resulta que: *dada una función holomorfa en el exterior del contorno cerrado c y continua sobre c, su desarrollo en serie de facultad convergente, queda perfectamente determinada.*

Supongamos ahora, que se nos da la sucesión de los momentos factoriales $\{\alpha_n\}$

$$\alpha_n = \int_C t^{(n} f\,(t)\,dt = 2\pi i\, a_n$$

y el contorno cerrado C y además que se cumpla la condición

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\,|\,\alpha_n\,|}{\log\,n}$$

con $\lambda$ finito y $\lambda \geq$ máx $R(t)$ cuando $t$ recorre la curva $c$. Entonces la función $f(z)$ está determinada por el desarrollo en serie de facultad

$$f\,(z) = \sum^{\infty} \frac{\alpha_n}{z\,(z+1)\ldots(z+n)}$$

convergente en el semi plano: $R\ (z) > \lambda$, quedando de este modo resuelto el problema de los momentos factoriales para este caso.

18. Por ahora nos limitaremos a estas consideraciones, y dejamos planteada la cuestión de los momentos factoriales sobre una curva abierta, y el de los momentos factoriales del tipo Stieltjes

$$c_n = \int_0^{\infty} x^{(n} f\,(x)\,dx$$

o del tipo Le Roy-Hausdorff

$$c_n = \int_0^{1} x^{(n} f\,(x)\,dx$$

o del tipo Hambuger

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(n} f\,(x)\,dx$$

Se puede generalizar también este problema considerando integrales de Stieltjes.

*(Continuará)*

# HESPERIOIDEA ARGENTINA VIII

POR

KENNETH J. HAYWARD
F.R.E.S., F.R.G.S., F.Z.S.

Con la publicación de este trabajo puedo decir que, por fin, la tarea de estudiar los hespéridos argentinos conocidos hasta ahora, queda casi terminada. Este trabajo fué iniciado en enero de 1932, desde cuya fecha han sido tratados como argentinos no menos de 134 géneros y 386 especies, subespecies o formas (88 de las especies resultan nuevas para la ciencia).

Actualmente tengo en estudio 7 especies adicionales y existen en mi colección las hembras de 5 más (en su mayor parte aparentemente nuevas para la ciencia), cuyos machos no han sido descubiertos aún.

Así el número de formas argentinas conocidas hasta la fecha ha llegado a la imponente cifra de 398.

*Aguna williamsi* Hayw.

He recibido un segundo ejemplar de esta especie, también hembra, de El Dorado, Misiones (Bosq leg)..

**Telegonus fulgor** nov.

Difiere de la especie *fulgurator* Walsh solamente en que falta el área basal-costal blanca del ala posterior en su faz inferior. Los genitales de los machos son aparentemente iguales a los de la citada especie.

Holotipo ♂ en mi colección de Misiones, Argentina. Según mi amigo Sr. Bell, existen también dos ejemplares en la colección del American Museum of Natural History, Nueva York.

**Telemiades xantho** nov. (Fig. 1).

Color de fondo parduzco, cabeza, tórax, abdomen y toda la superficie superior de las alas cubiertos con pelos de color ocre-amarillento. Los palpos con muchos pelos amarillos, como también el pectus. Los pelos de las patas más bien dorados.

En el ala anterior los pelos ocre-amarillos son de menor intensidad hacia el borde, por lo cual esta parte del ala tiene una apariencia más oscura. Hay tres puntos dorados hialinos subapicales, el costal y el inferior en forma de un guión, el punto entre estos dos de la mitad de su largo y su lado próximo formando una línea recta con el borde próximo de los otros dos. En el disco del ala hay tres manchas

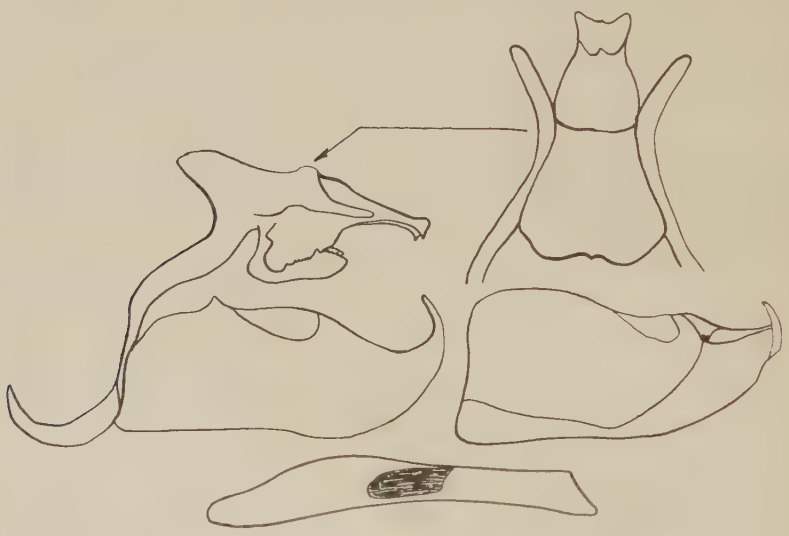

Fig. 1. — Genitalia de *Telemiades xantho* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

doradas hialinas, una grande en la célula, excavada distalmente, otra cuadrada e igualmente grande debajo y un pequeño punto más distal. Las nervaduras son negruzcas y hay rastros de manchas oscuras en la segunda célula cubital a 1/2 y 2/3. El grupo de manchas hialinas está bordeado de color más obscuro.

En el ala posterior hay rastros de una línea irregular basal y otra postmediana de color pardo. Las orlas son de color pardo oscuro.

La faz inferior es de un color pardo oscuro, la base el ala anterior y su borde interior más claros y el diseño de puntos y manchas hialinos igual al de la faz superior. La mitad basal del área costal y la base del ala anterior con pelos amarillentos. Debajo de los puntos

subapicales se encuentra un punto pequeño oscuro, y hay un guión oscuro en el área clara del margen interior a 2/3.

En el ala posterior se ve claramente líneas oscuras basal, postbasal y postmediana y el borde del ala es del mismo color. En la base de la proyección caudal hay una mancha redondeada oscura. El pliegue anal es claro.

Holotipo ♂ de Misiones, Argentina, en mi colección.

*Pellicia genoptila* (Burm). (Fig. 2).

1878. *Hellas* (en error por *Helias*) *gonoptila* Burmeister, Descr. Phys. Rép. Arg. 5: 260.

1933. *Pellicia gonoptila* Hayward, Rev. Soc. Ent. Arg. 5: 232.

Aprovecho esta oportunidad para dar un dibujo de los genitales de *gonoptila* Burmeister.

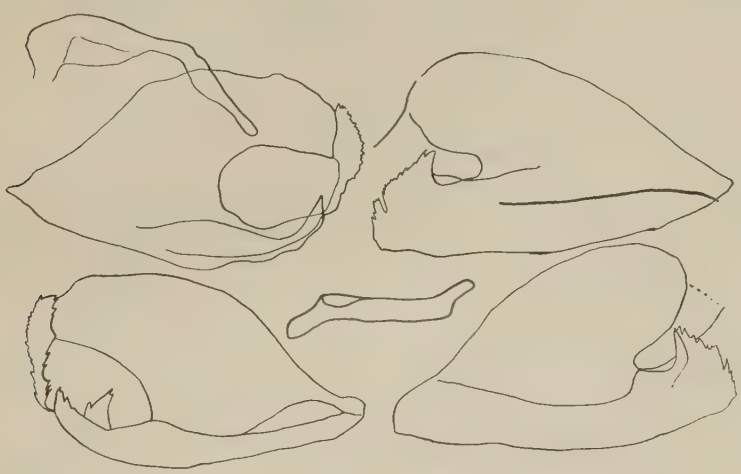

Fig. 2. — Genitalia de *Pellicia gonoptila* Burm. (Argentina).

*Pellicia costimacula* H. S.

1870. Herrich Schaffer, Corr-Bl. Zool-Min. Ver. Regensb. p. 160.

Expansión alar variable entre 33-35 mm.

Area costal y basal de las alas de color gris-violáceo en forma que las fajas oscuras son más resaltantes que en las demás especies de este género. La faja basal es débil y fina, la mediana ancha cuadrada y se extiende desde la costa del ala anterior hasta la mediana, sin unirse con la faja postdiscal que es angulada agudamente en su

parte superior. Las fajas basal y postmediana son continuadas en el ala posterior y la faja mediana de esta ala es completa. El borde de ambas alas es oscuro.

En la faz inferior el color de fondo es más claro con un leve brillo purpúreo y hay una área clara en el ápice del ala anterior. Además, el borde inferior del ala anterior y la mitad inferior del ala posterior son claros y las fajas del ala posterior son en forma de una serie de puntos obscuros en la parte clara del ala. Hay un dibujo de los genitales del macho en *Biol. Centr. Amer. Rhop.* 2.

Patria. — Desde Méjico hasta la Argentina, bastante común. En la Argentina se le ha hallado en Misiones.

**Pellicia hersilia** nov. (Fig. 3).

Expansión alar 26 mm.

El color de fondo es gris violeta. En el ala anterior se ven rastros de una faja oscura basal y hay una distinta faja postbasal. A $^1/_2$

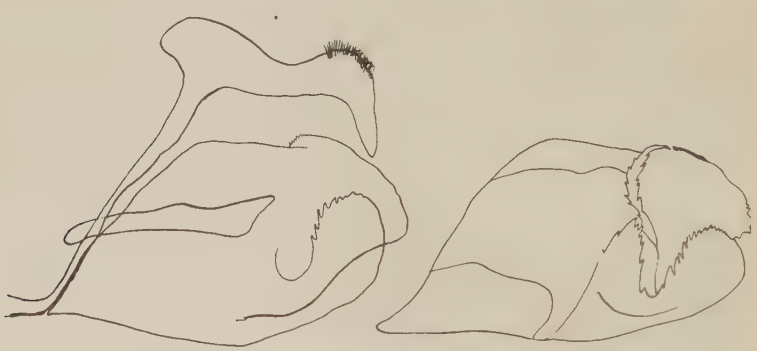

Fig. 3. — Genitalia de *Pellicia hersilia* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

costa hay otra faja más ancha que une en el disco del ala con la línea oscura antemarginal. Esta última línea es interrumpida hacia el ápice del ala donde está unida con la costa a $^3/_4$ por un puntito oscuro. El margen del ala es oscuro con rastros de una fina línea del color de fondo.

En el ala posterior hay un puntito oscuro en la célula y desde la base de la costa en forma curva hasta $^1/_2$ margen anal, hay una línea gruesa y oscura, sobrepuesta sobre la cual se encuentra un guión del color de fondo entre el punto de nacimiento de M3 y la analis inferior. Las orlas son de pardo oscuro.

La faz inferior es de color pardo, salpicada con escamas grises,

el diseño igual al de la faz superior, pero indistinto, el borde interior del ala anterior más claro.

Las válvulas de los genitales de los machos son prácticamente simétricas.

Holotipo ♂ de Metán y paratipo ♂ de Orán, Provincia de Salta, Argentina (leg. Kohler, x. 1935), en mi colección. Un paratipo ♂ « Argentina » en col. Mus. Arg. Ciencias Naturales.

**Pellicia herse** nov. (Fig. 4).

Expansión alar 24 mm.

Parduzco, los bordes del ala anterior algo más claros que el disco del ala. Hay fajas oscuras basal, mediana y postmediana, pero tan poco resaltantes que se puede distinguirlas solamente con dificultad.

Fig. 4. — Genitalia de *Pellicia herse* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

La faz inferior es algo más clara, el borde interno del ala anterior más claro que el color de fondo. En el ala anterior no se nota diseño ninguno y en el ala posterior se puede apenas distinguir las fajas oscuras. Las orlas del color de fondo.

Holotipo ♂ de Misiones, Argentina, en la colección del autor.

**Pellicia hertha** nov. (Fig. 5).

Expansión alar 25 mm.

Color de fondo parduzco con rastros indistintos de fajas basal, mediana y postmediana de un color más oscuro. El margen de ambas alas, como también las orlas, de pardo oscuro.

La faz inferior de color pardo más claro, el borde interno del ala anterior claro, casi blanco, y se encuentra una manchita de escamas claras en el ápice del ala. También hay escamas claras en las nervaduras radiales a $^1/_2$ costa.

El ala posterior se aclara hacia el ángulo anal que es grisáceo, en forma que las fajas sobresalen en esta parte del ala.

Fig. 5. — Genitalia de *Pellicia hertha* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

Las válvulas de los genitales de los machos son muy ligeramente asimétricas.

Holotipo ♂ de Santa Ana en Misiones, Argentina, en la colección del autor.

**Pellicia hermione** nov. (Fig. 6).

Expansión alar 27 mm.

El color de fondo es parduzco con un muy leve tinte violeta. El diseño de fajas oscuras transversales consta de fajas basal, mediana y postmediana y será probablemente imposible separar esta especie de muchas otras de este género, salvo por un examen de sus genitales. El borde de ambas alas oscuro, pero con una hilera de puntos internervales más claros. Las orlas algo más claras que el color de fondo y hay una distinta línea marginal oscura.

En la faz inferior el borde interno del ala anterior es claro.

Holotipo ♂ de Santa Fe, Argentina, en mi colección.

**Pellicia hebe** nov. (Fig. 7).

Extensión alar 34 mm.

Es muy parecida a la especie *costimacula* H. S., de la cual se puede separar solamente por un examen de sus genitales.

FIG. 6. — Genitalia de *Pellicia hermione* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

FIG. 7. — Genitalia de *Pellicia hebe* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

El color de fondo es gris-violeta y el diseño de fajas es igual al de *costimacula* aunque algo menos marcado. El borde del ala anterior y mitad distal del ala posterior más bien parduzco. En su faz inferior también es igual a la especie *costimacula.*

Holotipo ♂ de Puerto Aguirre en Misiones, Argentina, en mi colección.

*Pellicia alicus* (Schaus) (Fig. 8).

1902. *Staphylus alicus* Schaus, Proc. U. S. Nat. Mus. p. 433.

Expansión alar 26 mm.

Color de fondo pardo oscuro con un leve matiz violeta. Hay en ambas alas una faja oscura postbasal y otra postmediana y una hilera de puntos oscuros antemarginales.

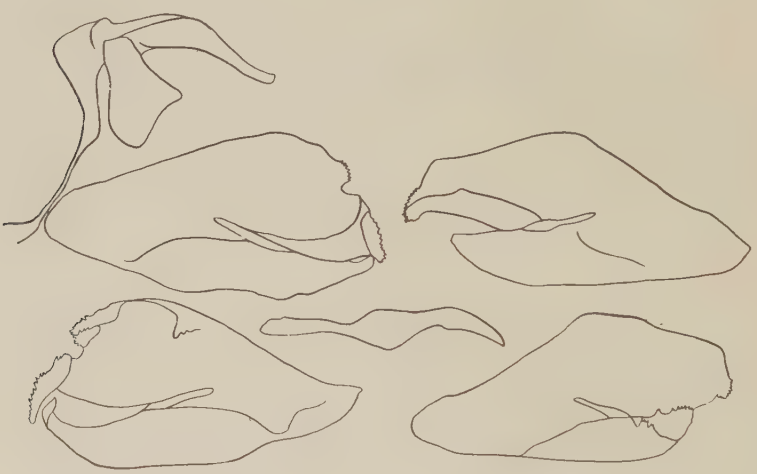

Fig. 8. — Genitalia de *Pellicia alicus* Schaus. (Argentina).

En la faz inferior el borde interno del ala anterior es del color de fondo y no más claro.

Patria. — Brasil y Argentina (Misiones), en mi colección. Del Perú, Uruguay y Bolivia en la colección del Museo Argentino de Ciencias Naturales.

**Pellicia** (?) **alicoides** nov. (Fig. 9).

Expansión alar 26 mm.

Difícilmente separable de *Pellicia alicus* Schaus, salvo por la falta del pincel de pelos en el ala posterior.

Color de fondo parduzco, la base de ambas alas más oscura, las orlas apenas más claras.

Hay una faja mediana y otra postdiscal y una hilera de puntos o lúnulos submarginales de un pardo más oscuro en ambas alas, las dos fajas distintas en la mitad superior del ala anterior y poco resaltantes en el resto de las alas donde también son irregulares. Esta irregularidad de las alas, formadas más bien por una serie de manchas, da a las alas una apariencia algo marmoreada en dos tonos de pardo.

Fig. 9. — Genitalia de *Pellicia* (?) *alicoides* Hayw. (Holotipo ♂. Paraguay).

La faz inferior es igual, el borde interno del ala anterior más claro.

Holotipo ♂ de Mbuveva en Paraguay; allotipo ♀ de Misiones (Argentina) y dos paratipos ♂♂ de Paraguay y Misiones, todos en mi colección.

Esta especie no pertenece al género *Pellicia*, como está descripta, pero sigo a Bell (*Amer. Mus. Novitates* N° 914, 1937, *damon, phintias, achates*) al colocarla en *Pellicia*, de la cual difiere solamente en no tener el pincel de pelos en la costa del ala posterior y el subcostal de esta ala hinchada. Será probablemente necesario más adelante formar un nuevo género con estas especies, que por falta del pliegue costal en sus machos, no pueden entrar en *Gorgopas*, y por falta del pincel de pelos en las tibias traseras no pueden ser colocadas en *Eracon* o *Mycteris*.

*Carrhenes leada* Btlr. (Fig. 10).

1870. Butler, Trans. Ent. Soc. Ldn. p. 516.

Expansión alar entre 30-34 mm.

Algo parecida a la especie *Eudamides ozema* Butler, generalmente bastante desprovista de escamas, el diseño gris-amarillento sobre fondo blanco. Por lo general hay una mancha oscura apical más bien resaltante, en la cual se encuentran tres puntitos hialinos.

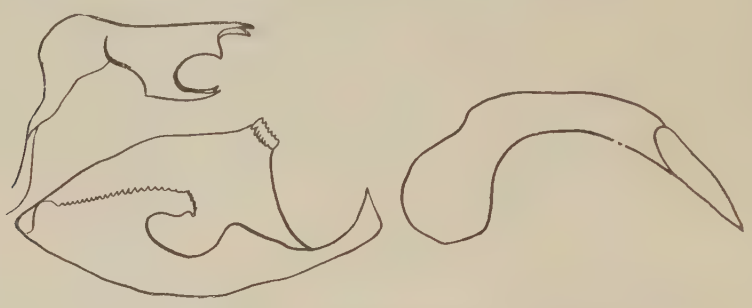

Fig. 10. — Genitalia de *Carrhenes leada* Butler. (Argentina).

Patria. — Costa Rica hasta Paraguay y en la Argentina de Misiones. El dibujo de los genitales ha sido hecho de los ejemplares argentinos.

*Timochares trifasciata* Hew.

Nueva procedencia: Anta. Provincia de Salta (leg. Kohler).

*Polites vibex* (Hbn.).

Nueva procedencia: Territorio del Río Negro (leg. Kohler).

*Ochlodes pohli* (Bell).

1932. *Augiades pohli* Bell, Bull. Brooklyn Ent. Soc. 27 (3): 136-7, Pl. 13, fig. 4 (genitalia).

♂ Cabeza, tórax y abdomen con pelos amarillos.

El color de fondo es amarillo-anaranjado, el ápice y borde del ala anterior y área subcostal, borde externo y borde anal del ala posterior negros. En el ala anterior hay una línea negra sobre la mediana que está unida con la faja negra irregular (llevando el estigma en los machos) que corre paralela al borde oscuro. Las nervaduras

en el área basal son negras. En la faz inferior el color de fondo es amarillo, el disco del ala anterior y su borde interno siendo negruzcos. El área subcostal es de amarillo vivo. El ala posterior lleva una hilera curva postmediana de máculas más claras que el color de fondo. Las orlas del ala anterior pardas, salvo en el ángulo interior, donde se las encuentra amarillas. Del ala posterior amarillas.

♀ El área amarilla del macho es muy reducida y en forma de máculas divididas entre sí por las nervaduras negras. La base de ambas alas es casi completamente negra y el área subcostal del ala anterior es amarilla.

Exp. alar ♂♂ 30-31 mm., ♀♀ 31-32 mm.

Patria. — Brasil y Argentina. En la Argentina de Misiones y de La Rioja.

Género *Lerodea* Scudder.

1872. *Lerodea* Scudder, Rept. Peabody Acad. 1871, 80 (59). Orthotipo *Hesperia eufala* Edwards.

1872. *Cymaenes* Scudder, loc. cit. 82 (61). Orthotipo *Cobalus tripunctus* Herrich Schaffer.

1900. *Megistias* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2 p. 571, Orthotipo *Hesperia tripunctata* Latreille.

Las especies *eufala*, *tripunctus* y *tripunctata* son cogenéricas, por lo cual las especies colocadas en *Megistias* en Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 159-163, 1934, y trabajos subsiguientes, deben ser transferidas al género *Lerodea*.

**Lerodea lepta** nov.

Expansión alar 30 mm.

El color de fondo es pardo algo aceitunoso, las orlas más claras.

En el ala anterior hay tres puntitos subapicales de forma curva, la concavidad hacia el ápice del ala, los puntos aumentándose en tamaño desde la costa hacia adentro del ala. En el disco del ala hay tres puntos, uno chico hialino y cuadrado en el ápice de la tercera célula mediana, otra igual, pero más grande, en el ápice de la primera célula cubital, ambos de color blanco y un tercer punto en el medio de la segunda célula cubital, algo más amarillento.

En la faz inferior el color de fondo es pardo claro, el disco del ala anterior negruzco, el diseño como en la faz superior, pero el punto discal inferior (amarillento) falta. El área costal hasta $^1/_2$ con algunos pelos de color ocre.

En el ala posterior hay una hilera curva de máculas algo más claras que el color de fondo desde $^1/_2$ costa hasta el medio de la segunda célula cubital. Estas máculas llevan un borde apenas más orcuros que el color de fondo.

Holotipo ♂ y allotipo ♀ de Tucumán, Argentina, en mi colección.

**Lerodea zama** nov. (Fig. 11).

Expansión alar 26 mm.

Color de fondo pardo negruzco, las orlas más claras, el disco del ala posterior con unos largos pelos amarillentos.

El diseño del ala anterior consta de un puntito alargado en el fin de la célula y otro en el medio de la segunda célula cubital, ambos ligeramente amarillentos, y tres puntos blancos hialinos subapicales. Estos tres puntos subapicales son de forma ligeramente curvada

Fig. 11. — Genitalia de *Lerodea zama* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

(concavidad distad), los tres puntos siendo subiguales. Hay además dos manchitas iguales en el disco del ala, una chica en el ápice de la célula mediana inferior y la otra mucho más grande frente del ápice de la célula cubital superior.

En la faz inferior el color del ala anterior es de pardo vivo, la mitad superior cubierta con pelos y escamas de color ocre, especialmente en la radialis y la mediana, donde casi forman una línea de este color. El diseño es igual al de la faz superior. El color del ala posterior es más bien pardo negruzco con un ligero matiz gris-violeta y con una faja mediana oscura apenas indicada y con manchas

más pardo café cerca de la base de la célula radialis y en el borde de la segunda célula cubital, pero estas manchas muy indistintas.

Palpos y pectus de un color blanco-ocre, antenas parcialmente anilladas blancas en la unión de cada artejo.

Holotipo ♂ del Río Ochuna en Tucumán (Argentina) en mi colección.

**Lerodea albinotata** nov. (Fig. 12).

♂ Expansión alar 27 mm.

El color de fondo de la faz superior parduzco sin diseño, las orlas ligeramente más claras.

En la faz inferior el ala anterior es parduzco en el disco y algo más claro en el área subcostal y en el borde externo. Hay indicaciones de un guión claro en el medio de la segunda célula cubital.

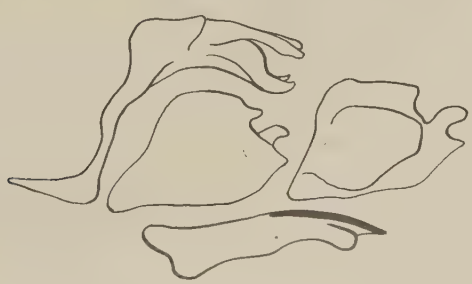

Fig. 12. — Genitalia de *Lerodea albinotata* Hayw. (Holotipo ♂. Paraguay).

El ala posterior es algo más grisácea con un puntito claro en el fin de la célula y una hilera curva postdiscal de puntos claros chicos, terminando en uno mucho más grande frente del borde anal.

♀ Tengo a la vista una hembra que es aparentemente de esta especie, en la que los puntos claros de la faz inferior del ala posterior son más marcados. Además en el ala anterior en la faz inferior, se nota un diseño de pequeñísimos puntos claros, dos subapicales y dos en el disco del ala, el inferior de estos dos de forma alargada (verticalmente) y el guión claro en la segunda célula cubital está bien indicado. De otro modo, en la faz superior de esta ala se encuenta solamente indicaciones del punto subapical inferior, siendo esta faz, aparte de esto, sin diseño. Su expansión alar es igual a la del macho.

Dado las diferencias entre el diseño del macho y hembra que

tengo a la vista, es probable que el diseño de puntos sea variable en esta especie, y que en algunos machos se encuentre este diseño.

Holotipo ♂ del Paraguay, allotipo ♀ de Misiones y un paratipo ♀ del Paraguay, todos en mi colección.

**Lerodea uniformis** nov. (Fig. 13).

Expansión alar 26 mm.

El color de fondo de la faz superior es parduzco más bien salpicado con pelos y escamas de un pardo amarillento, dando al insecto la apariencia de ser pardo claro. Sin diseño. Las orlas más claras,

Fig. 13. — Genitalia de *Lerodea uniformis* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

más grisáceas. La faz inferior de un tono más claro, aclarándose ligeramente hacia el borde exterior de ambas alas. Sin diseño.

Holotipo y paratipo ♂♂ de Misiones en mi colección.

**Lerodea violacea** nov. (Fig. 14).

Expansión alar 25 mm.

El color de fondo de la faz superior es pardo negruzco con un matiz algo olivácco en algunos ejemplares. El disco del ala posterior es algo más oscuro. Las orlas del color de fondo. Las alas sin diseño.

En la faz inferior el color de fondo es igual, pero un poco más claro, el borde interno del ala anterior claro.

Las áreas subcostal y apical del ala anterior y el borde de ambas alas con un brillo violáceo.

Palpos con pelos amarillentos, antena con una ancha anilla ama-

rillenta antes de la maza, la parte ventral del apículus también de este color.

Holotipo ♂ de Loreto, Misiones (leg. Ogloblin) y un paratipo ♂ del mismo Territorio en la colección del autor.

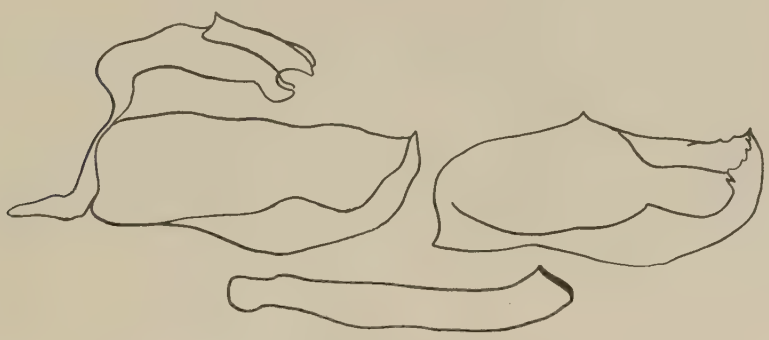

Fig. 14. — Genitalia de *Lerodea violacea* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

**Lerodea olivacea** nov. (Fig. 15).

Expansión alar 26 mm.

El color de fondo es parduzco y las alas son bien salpicadas con escamas y pelos de color olivo, dando al insecto un color oliváceo. Las orlas son del color de fondo. No hay diseño salvo por una pequeña mancha oscura en el borde del ángulo anal del ala posterior.

Fig. 15. — Genitalia de *Lerodea olivacea* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

El color de fondo y apariencia general de la faz inferior es igual al de la faz superior, pero algo más claro.

Holotipo ♂ de El Dorado, Misiones (Argentina) en mi colección.

« *Prenes* » *nero* F. fa. *syvicola* H. S.

Nueva procedencia: Anta, Provincia de Salta (leg. Kohler).

**Thespieus moneraspernatus** nov. (Fig. 16).

Expansión alar 44 mm.

Es parecida en su maculación y diseño a la especie *aspernatus* Draudt (*Seitz, Macrolep.* 5: 952, 1923), y es probable que esté confundida con esta especie en algunas colecciones.

Difiere de *aspernatus* en lo siguiente: Los puntitos subapicales en vez de ser casi subiguales aumentan en tamaño hacia adentro del ala y en vez de tener sus bordes proximal y distal derechos y

Fig. 16. — Genitalia de *Thespieus moneraspernatus* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

paralelos el punto costal es distad a los otros dos, por lo cual los dos bordes forman una curva (concavidad distad). El punto doble celular es en *moneraspernatus* más basad que en *aspernatus* y en la hilera de puntos discales el superior es grande y bien marcado (generalmente chico o faltando en *aspernatus*), el tercer punto es más grande, más cuadrado y menos triangular, y el punto inferior es el más chico (no así en *aspernatus*).

En el ala posterior las máculas discales son más del doble del tamaño de las de *aspernatus*. Todos los puntos discales del ala anterior y las máculas del ala posterior son completamente hialinos, sin tener escamas de color blanco o amarillento. Como en *aspernatus* los pelos del tórax, abdomen y base de las alas son de color

verdoso y hay un pincel de pelos blanquizcos en el pliegue abdominal de la especie aquí descripta.

En la faz inferior el ala anterior es de fondo más oscuro y el ápice es bisecado por una gruesa línea clara que forma una continuación de la hilera oblicua de puntos hialinos discales. En *aspernatus* el área clara en el ápice del ala es paralela al borde y no se une con la hilera de puntos discales. El punto inferior de la hilera oblicua es menos difuso que en *aspernatus*.

En el ala posterior el área subcostal es más clara que en *aspernatus* y el diseño pardo oscuro no llega a la costa. La hilera de máculas discales se extiende hasta el margen en forma de una línea blanquizca y estas máculas son bordeadas distalmente pardo-rojizo oscuras (en *aspernatus* solamente las máculas inferiores son así bordeadas). El área basal con un diseño de líneas blancas muy parecido a la especie *xarippe* Butler.

Las orlas como en *aspernatus*, pero el límite entre las áreas pardo y blanco distinto y no graduado.

Hay otras ligeras diferencias, notablemente el color más oscuro del área anal de la faz inferior en la nueva especie.

En cuanto a los genitales de los machos, son distintos y constantes, y para permitir la apreciación de estas diferencias, se da el dibujo de ambas especies.

Se puede separar *moneraspernatus* de otras especies vecinas por la coloración de los pelos del tórax, abdomen y base de las alas y por tener la maculación completamente hialina y no blanquecina o amarillenta).

Holotipo ♂ y paratipo ♂ de El Dorado, Misiones (Argentina) en mi colección. Esta especie vuela con toda seguridad en el Paraguay (costa del Alto Paraná) y en el Brasil (costa del Alto Uruguay, distante de El Dorado unos 80 Km.).

Fig. 17. — Genitalia de *Thespieus aspernatus* Draudt. (Brasil).

**Tirynthia ornata** nov. (Fig. 18).

Expansión alar ♂ 32 mm.

Color de fondo pardo negruzco, las orlas más claras, el disco del ala posterior con rastros de una hilera mediana de máculas amarillas. El diseño del ala anterior consta de tres puntos blancos hialinos subapicales, el primero a $^2/_3$ costa de forma lineal, el segundo igual, pero más corto, el inferior todavía más corto, más bien un punto, algo más distad. En el disco del ala hay un grupo de cuatro manchitas blancas hialinas, dos en el fin de la célula una arriba de la otra, algo alargadas, otra más redondeada en el ápice de la célula mediana inferior y la otra en forma de un guión vertical en la primera célula cubital directamente debajo el punto de nacimiento de $Cu^1$. En línea con las manchitas en las células cubital superior y mediana inferior y hacia el ápice del ala hay un área clara amarillenta.

El color de fondo de la faz inferior es más bien gris aceituna y el diseño oscuro es algo confuso. El disco y borde interior del ala anterior es negruzco y el diseño de puntos hialinos se repite, con la adición de una manchita blanca subcostal arriba de las dos manchas

lineales en el fin de la célula y con un largo guion blanco en la célula cubital inferior.

Además los puntos subapicales están extendidos distalmente con escamas blancas.

En el ala posterior el área basal es oscura con indicaciones de un punto claro subcostal y un punto claro redondeado en el medio del área oscura. El área anal es también oscura, clara hacia la base

Fig. 18. — Genitalia de *Tirynthia ornata* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

de las dos células anales, esta área clara separa la parte oscura basal de la parte oscura anal. Hay una hilera antemarginal de seis guiones internervales oscuros y una fina línea marginal del mismo color.

Palpos y pectus y pelos de la femora blancos, las tibias y tarsos pardos.

Coloco esta especie en *Tirynthia* por ser el género al que, en mi opinión, más cerca corresponde.

Holotipo ♂ en mi colección, de Misiones, Argentina. Allotipo ♀ y un paratipo ♂ en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales de la misma procedencia.

**Cobalus cocalus** nov. (Fig. 19).

Expansión alar 30 mm.

Color de fondo pardo café. En el ala anterior hay dos puntitos amarillentos subapicales y dos indistintos puntitos similares en el disco del ala en los ápices de las células mediana inferior y cubital superior.

Fig. 19. — Genitalia de *Cobalus cocalus* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

El color de fondo de la faz inferior es parecido al de la faz superior, un poco más amarillento; los puntos claros más resaltantes, el borde interno del color de fondo y no más claro.

El ala posterior es un poco más oscura y hay una mancha postmediana algo más clara que el fondo. Las orlas son del color de fondo, un poco más claras hacia el ángulo interno del ala anterior.

Holotipo y paratipo ♂♂ en mi colección de Misiones, Argentina.

**Cobaloides** nov. gen (Fig. 20).

Antenas la mitad del largo de la costa, de 40 segmentos de las cuales 20 forman una masa grueza con apículo corto y poco recurvado.

Palpos con el primer y tercer artejos subiguales, el segundo 1 $^1/_2$ veces el primero, erguidos.

Tibias de las patas anteriores con un mechón de pelos; de las patas medianas con un par de espolones y una línea de espinitas cortas, tarsos de estas patas con espinas cortas; tibias de las patas traseras con dos pares de largos espolones y tres pares de espinas cortas, además en la parte dorsal numerosas espinas cortas, los tarsos de estas patas con una hilera de espinas cortas.

Alas anteriores con $Cu^2$ más cerca de $Cu^1$ que de la base del ala; Sc hinchada en su base y $Cu^1$ deprimida en su medio.

Alas posteriores algo alargadas en el ángulo anal, M3 y $Cu^1$ nacen muy cerca una de la otra y $Cu^2$ cerca de $Cu^1$.

El estigma de los machos consta de una línea sobre el lado inferior de la mediana entre el punto de nacimiento de $Cu^1$ y cerca del punto de nacimiento de $Cu^2$, otra línea corta sobre el lado superior de $Cu^2$ y una tercera línea larga sobre la analis.

Genotipo *Cobaloides argus* nov.

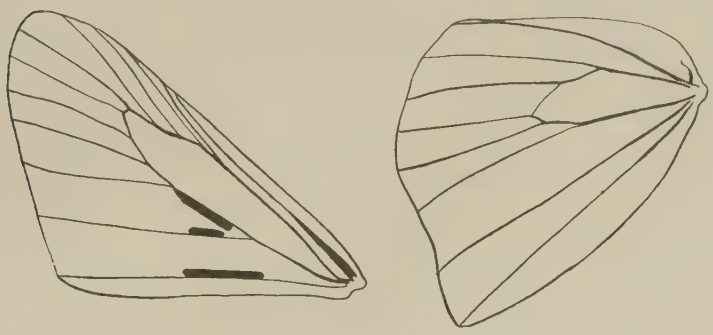

Fig. 20. — Nervadura del género *Cobaloides* Hayw.

**Cobaloides argus** nov. (Fig. 21).

♂ Expansión alar 38 mm.

Color de fondo parduzco. El diseño del ala anterior consta de ocho puntos o manchas hialinas ligeramente amarillentas. Hay tres puntos lineales subapicales, el inferior algo más grande y algo distad de los otros. En el fin de la célula hay un doble punto en forma de dos guiones y se encuentra en el disco del ala una hilera de tres manchas, la primera frente del ápice de la célula $M^3$, la segunda y la más grande frente del ápice de la célula $Cu^1$, ambas cuadradas, y la tercera, menos hialina, más amarillenta, más chica, en el medio de la segunda célula cubital.

Las orlas son más claras que el color de fondo, salvo hacia el ápice del ala anterior.

La faz inferior es de un color pardo gris salpicado con gris-lila en el ápice del ala anterior y sobre el ala posterior. El disco del ala anterior negruzco, el diseño igual al de la faz superior salvo que la mancha inferior de la hilera mediana es más grande, más difusa, blanca, y hay un área más clara en el fondo y con borde distal

oscuro entre los puntos subapicales y la primera mancha de la hilera mediana. La mitad basal del área costal es clara.

En el ala posterior hay un doble punto oscuro basal y una hilera curva mediana de seis puntos redondeados oscuros ligeramente anillados más claros, el tercer punto desde la costa más bien doble. En la curva formada por esta hilera como también en las células anales, hay menos escamas gris-lila formando así áreas más oscuras. En algunos ejemplares se puede notar una indistinta mancha o punto claro en el fin de la célula.

♀ Expansión alar 40 mm.

Difiere del macho por tener la maculación más grande.

En ambos sexos los palpos son blancos y la maza de las antenas es de color herrumbre.

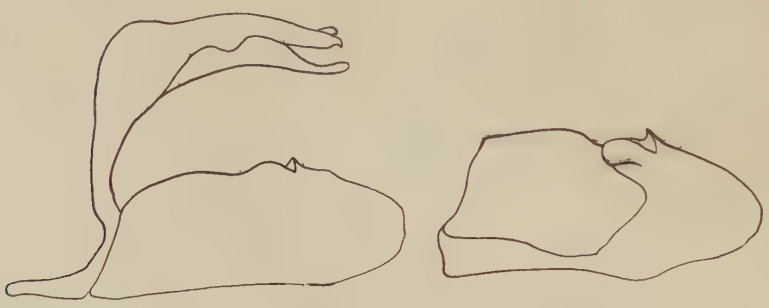

Fig. 21. — Genitalia de *Cobaloides argus* Hayw. (Holotipo ♂, Paraguay).

Holotipo ♂ y allotipo ♀ de Villarrica en el Paraguay (leg. Jorgensen), ambos en mi colección. He capturado esta especie también en varias partes del Territorio de Misiones (Argentina), en el Alto Paraná.

*Eutychide hialinus* Bell.

1930. Bell, Journ. N. Y. Ent. Soc. 38: 152, fig. 6 (genitalia).

Expansión alar 30-31 mm.

Color de fondo pardo oscuro con un tono algo purpúreo. En el ala anterior se encuentran uno o dos puntitos subapicales y tres en el disco del ala en los ápices de las células $M^3$ y $Cu^1$ y en el medio de la célula cubital inferior. Hay rastros de una hilera curva de puntos amarillos en el disco del ala posterior. Las orlas algo más claras que el color de fondo.

El color de fondo de la faz inferior pardo gris claro, el disco del ala anterior negruzco, el diseño de puntos hialinos igual al de la faz superior, pero algo más extenso, especialmente el punto en el medio de la segunda célula cubital que es difuso. En el disco del ala posterior hay una hilera curva de guiones (poco visibles en algunos ejemplares) y todas las alas tienen un brillo liláceo.

Patria el Brasil y Misiones en la Argentina.

*Phanes cumbre* Schaus (Fig. 22).

1902. Schaus, Proc. U. S. Nat. Mus. p. 445.

Expansión alar 27 mm.

Color de fondo pardusco. En el ala anterior hay tres puntitos subapicales blancos hialinos y tres en el disco en los ápices de la tercera célula mediana, y primera cubital y la otra en el medio de la segunda célula cubital. Este último punto es muy reducido (a veces falta), y el punto en la primera célula cubital es el más grande.

La faz inferior es más clara, el área costal del ala anterior y el disco del ala posterior con un leve tono rojizo.

Fig. 22. — Genitalia de *Phanes cumbre* Schaus. (Argentina).

En el fin de la célula del ala posterior hay un puntito claro y una hilera de otros puntos iguales en el disco del ala.

Patria. — El Brasil y Río Ochuna en Tucumán (Argentina).

**Phanes triumviralis** nov. (Fig. 23).

Expansión alar 27 mm.

Hay tres especies de *Phanes* tan parecidas en su maculación, que es prácticamente imposible separarlas a simple vista. Estas tres especies son *cumbre* Schaus (menconadas más arriba), la especie aquí descripta, y una tecerra especie de que no tengo machos disponibles para describirla.

La especie *cumbre* es conocida en Santa Catharina (teste Bell) y Petrópolis (Schaus) en el Brasil y en la Argentina del Río Ochuna, Tucumán.

La especie *triumviralis* la tengo de Paraguay y de Puerto Aguirre en Misiones, y la tercera especie vuela también en el norte deMisiones.

Fig. 23. — Genitalia de *Phanes triumviralis* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

La especie *triumviralis* difiere de *cumbre* en que los puntitos hialinos subapicales están más bien en línea recta, siendo ligeramente en línea curva en *cumbre*. Aparte de estos, no hay diferencias que se puedan apreciar.

Holotipo ♂ de Puerto Aguirre en Misiones (Argentina) y allotipo ♀ de Villarrica (Paraguay, leg. Jorgensen), ambos en mi colección.

Un ♂ y una ♀ paratipos de Misiones en la col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

**Vistigma** gen. nov. (Fig. 24).

Antenas un poco más largas que $^1/_2$ costa, de 44 artejos, el apículo recurvado y más o menos $^1/_3$ del largo de la maza, que es de 26 artejos en total.

Segundo artejo de los palpos un poco más corto que los subiguales primer y tercer artejos.

Tibias anteriores con un mechón de pelos y sin espinas. Tibias y tarsos medianos con espinas, las tibias con un par de largos espolones, tibias traseras con dos pares de espolones y los tarsos correspondientes con espinas.

$Cu^2$ del ala anterior nace equidistante de la base del ala y del punto de nacimiento de $Cu^1$, $M^2$ más cerca de $M^3$. que $m^1$. El estigma del macho en forma de un IV o VI, la línea recta sobre la nervadura $Cu^2$ en su lado superior y el V en el ángulo formado por esta nervadura y la mediana en la primera célula cubital. En el ala posterior

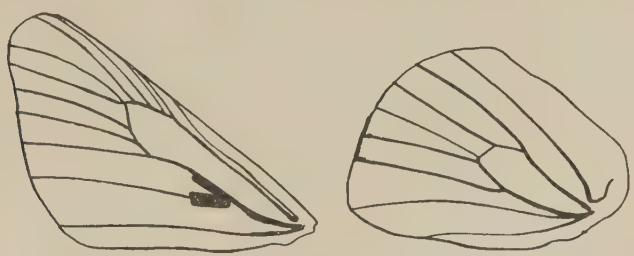

Fig. 24. — Nervaura del género *Vistigma* Hayw.

$M^3$ y $Cu^1$ nacen cerca una de la otra y $Cu^2$ a $^2/_3$ de la distancia entre la base del ala y $Cu^1$.

Genotipo *Vistigma xanthobasis* nov. Este género es vecino de *Phanes*.

**Vistigma xanthobasis** nov. (Fig. 25).

♂ Expansión alar 32 mm.

Color de fondo parduzco, el área subscostal del ala anterior en su mitad basal con pelos dorados; las orlas algo más claras que el color de fondo.

El diseño del ala anterior consta de un puntito diminuto, claro en el fin de la célula, tres puntos subapicales, el costal muy chico o, a veces, falta; el segundo y tercero lineales. En el disco del ala hay tres manchas más bien cuadradas, en el ápice de la tercera célula mediana, frente del ápice de la primera célula cubital y en el medio de la segunda célula cubital. Entre esta hilera de manchas y los puntos subapicales hay dos muy insignificantes puntitos adicionales. Todos estos puntos y manchas son amarillentos y hialinos.

El color de fondo de la faz inferior es un poco más claro, la base del ala anterior negruzca, el área costal, una mancha entre los puntos subapicales y las manchas discales y una faja distad a la hilera de manchas discales de color más bien herrumbre-rojizo. El margen del ala de color amarillento. El diseño de puntos y manchas igual al de la faz superior.

En el ala posterior la base del ala, área costal, un punto redondeado en el fin de la célula y una hilera antemarginal de puntos internervales de color herrumbre rojizo sobre un fondo amarillento.

Fig. 25. — Genitalia de *Vistigma xanthobasis* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

Palpos y pectus grises, faz inferior de la maza de la antena amarilla.

♀ Expansión alar 35 mm.

Difiere del macho por tener las manchas discales hialinas blancas en vez de ser amarillas.

Holotipo ♂ de Puerto Bemberg, allotipo y paratipo ♀♀ de Puerto Aguirre (ambos en Misiones, Argentina), en mi colección, capturados por mí en Diciembre-Marzo, 1933-34. Hay también un paratipo ♂ de la misma procedencia y fecha en la col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

**Phlebodes bella** nov. (Fig. 26).

♂ Expansión alar 25 mm.

El color de fondo es amarillo anaranjado, la base de ambas alas algo negruzco, especialmente en el ala anterior.

En el ala anterior hay una faja oscura (negra) oblicua a $^3/_4$ costa que se extiende hasta el medio de la analis (sin llegar al borde interno). Esta faja es ligeramente extendida hacia la base del ala sobre la mediana y sobre la radialis y distalmente en forma de una mancha en la segunda célula mediana, a veces llegando a unirse con el borde oscuro. El ápice del ala (uniéndose en la costa con la faja oblícua oscura) y borde del ala, negros; el borde más ancho hacia el ángulo interno. La célula analis más bien negruzca.

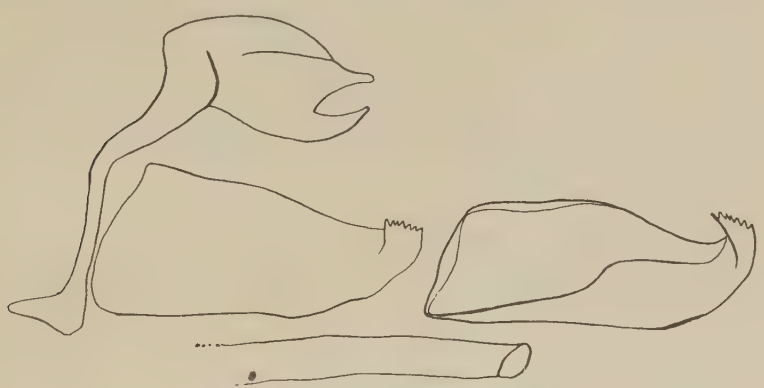

Fig. 26. — Genitalia de *Phlebodes bella* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

En el ala posterior las áreas costal, marginal y el borde anal son negros y el área basal oscura se extiende dentro del disco sobre las nervaduras. Las orlas son más bien grisáceas en el ala anterior (más oscuras en el ápice) y anaranjadas en el ala posterior.

En la faz inferior la mitad superior del ala anterior es negruzca, sobre cuyo color la faja amarilla resalta. Las áreas costal y apical son amarillentas, este color interrumpido por una línea negra en Sc hasta $^1/_2$ célula y todo, salvo la célula y una manchita subapical, muy salpicado con color herrumbre. Distad a la mancha amarilla subapical hay un puntito de color herrumbre.

En el ala posterior hay una mancha amarilla redondeada postdiscal y dos puntos iguales debajo, las células anales de color negruzco bordeado con una línea amarilla clara en la segunda célula

cubital y con el margen anal pardo café oscuro. El resto del ala de color de fondo amarillento bien salpicado con color herrumbre rojizo, que en la mitad discal del ala forma numerosos puntitos.

♀ La hembra difiere del macho en tener el diseño negro un poco más reducido, especialmente en el ala posterior, pero la diferencia es poco marcada.

La especie se coloca cerca de *silvicultrix* Hayward.

Holotipo y un paratipo ♂♂ y allotipo y un paratipo ♀♀ en mi colección y un paratipo ♂ y paratipo ♀ en la colección Breyer, todos del Río Ochuna, Tucumán, Argentina. Un ♂ paratipo en la col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

Género *Eprius* Godman.

1901. *Epeus* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop 2: 601, Haplotiplo *Epeus veleda* Godman. (nombre preocupado por *Epeus* Kuwert 1896).
1901. *Eprius* Godman, *loc. cit.* p. 741, Diatipo *Epeus veleda* Godman.

El margen proximal del pliegue anal del ala posterior con largos pelos. Antenas largas con una maza larga; artejo final de los palpos largo y erguido. El estigma del macho formado por dos líneas longitudinales en la mediana.

*Eprius veleda* Godm. (Fig. 27).

1901. *Epeus veleda* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 601.
1901. *Eprius veleda* Godman, loc. cit. p. 741.

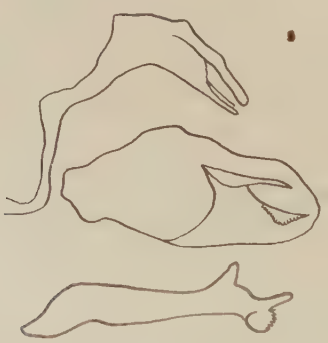

Fig. 27. — Genitalia de *Eprius veleda* Godm. (Argentina).

Expansión alar, 20 mm.

Una mariposita de color de fondo pardo negruzco y sin diseño.

La faz inferior del mismo color salpicado con pelos amarillos. La base de la maza de las antenas es amarillenta.

Dado la patria de este insecto, es muy curioso que haya sido capturado en la Argentina, pero parece que la determinación es exacta por tener la coloración de *veleda* y sus genitales no demuestran alguna diferencia.

Patria. — Méjico hasta Panamá y en Trinidad. Los dos ejemplares argentinos que tengo en mi colección son de procedencias de Tucumán y Misiones.

**Callimormus simplicius** nov. (Fig. 28).

Expansión alar variable entre 22-25 mm.

Color del fondo pardo café oscuro, las hembras algo más grisáceas. En algunos ejemplares hay rastros de tres manchas discales amarillentas en forma de una hilera oblicua. Las orlas del color de fondo.

Fig. 28. — Genitalia de *Callimormus simplicius* Hayw. (Holotipo ♂. Paraguay).

En la faz inferior el ala anterior es de color parduzco y hay rastros de tres puntos subapicales y otro chico en el fin de la célula, de un color algo más claro (grisáceo). Las nervaduras son más claras hacia el margen. En el ala posterior el color de fondo es igual y las nervaduras más claras, y hay una faja clara que cruza el ala en forma agudamente angulada desde $^2/_3$ costa hasta el medio del margen anal, formando el ángulo (concavidad basad) entre $M^1$ y $M^3$. En esta faz hay en ambas alas una fina línea oscura marginal.

Holotipo ♂ del Paraguay y allotipo ♀ del Chaco, Argentina, en mi colección, y dos ♀♀ paratipos de Corrientes (Argentina) en la colección Breyer.

Género *Artines* Godm.

1901. Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 608. Orthotipo *Thracides aepitus* Geyer.

Antenas largas, más de la mitad del largo de la costa; palpos

largos y erguidos; estigma del macho de forma sagital y situado en el ángulo formado por la mediana y Cu′.

Ala posterior con largos pelos en el borde anterior del pliegue abdominal.

*Artines odilia* (Plotz) (Fig. 29).

1883. *Apaustus odilia* Plotz, Exot. Schmett. 20, Hesp. Tab. 734.

Expansión alar 24 mm.

Color de fondo pardo negruzco. En el ala anterior hay cuatro puntitos amarillos hialinos subapicales en línea recta y una hilera de cuatro en el disco del ala, el superior nada más que un grupo reducido de escamas amarillas, el inferior alargado hacia la base del ala y también de escamas y los otros dos grandes y hialinos en los ápices de las células mediana inferior y cubital superior.

Fig. 29. — Genitalia de *Artines odilia* Plotz. (Argentina).

En el disco del ala posterior hay una mancha amarilla algo excavada en su lado proximal.

El ala anterior en su faz inferior más clara en el área subcostal y apical y con el diseño de la faz superior repetido; faltan los puntos discales superior e inferior.

El ala posterior es de color de fondo amarillo claro con dos puntos oscuros grandes y varios pequeños en el disco del ala y con una serie de líneas o guiones oscuros internervales antemarginales. Hay también una hilera irregular postmediana de puntos más claros que el color de fondo y uno o dos puntos iguales en el disco del ala.

Patria. — Brasil y en la Argentina, Iguazú en Misiones.

**Artines fastus** nov. (Fig. 30).

Expansión alar 25 mm.

El color de fondo de la faz superior negro aterciopelado. En el ala anterior, el área subcostal hasta $^2/_3$ amarilla y hay tres muy insignificantes puntos subapicales amarillos seguidos en forma curva por algunas escamas amarillas para unirse con dos manchas hialinas postdiscales, el inferior la más grande. Estas manchas son más bien claras en su centro y amarillas hacia las márgenes. La célula cubital inferior amarilla desde la base hasta debajo del medio de la mancha postdiscal inferior.

Fig. 30. — Genitalia de *Artines fastus* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

En el ala posterior hay una mancha amarilla en el disco y los pelos largos en el lado discal del pliegue abdominal son también amarillos. Las orlas de ambas alas amarillas en los ángulos inferiores y oscureciéndose hacia los ápices.

La faz inferior negruzca y muy salpicada con escamas de color olivo (salvo en el disco y en el borde interno del ala anterior). En el ala anterior el área subcostal hasta $^1/_2$ costa y la célula, más amarillentas; los puntitos subapicales apenas visibles, las dos manchas postdiscales resaltantes.

En el ala posterior hay dos manchitas blancas discales (anilladas más oscuras) y unos puntos oscuros antemarginales.

Holotipo ♂ en mi colección de Puerto Aguirre, Misiones, Argentina.

Concordia, 31 de Julio de 1938.

# RESTOS HUMANOS SUBFÓSILES DE MENDOZA

Por CARLOS RUSCONI

## 1. - Antecedentes

Mi reciente viaje al valle de Uspallata, realizado en compañía del personal del Museo de Historia Natural de Mendoza (14 a 16 de Abril de 1938), fué con el objeto de concluir con una parte de la explotación de varios túmulos prehispánicos descubiertos en una excursión anterior.

Durante mi última permanencia me ha sido posible visitar varias zonas arqueológicas y entre las cuales figura un lugar donde existían restos humanos, según una persona de allí que tuvo la deferencia de indicármelos. Pocos minutos después llegábamos al sitio pudiendo comprobar que aquella noticia era exacta. De inmediato comencé a levantar todos los trozos óseos, anotando los detalles de su posición en el terreno porque desde el primer momento me di cuenta que se trataba de vestigios mucho más antiguos que los descubiertos en los túmulos de otro lugar de Uspallata y en los cuales me fué posible levantar una treintena de individuos de diferentes edades (Rusconi, 1938, p. 203 y sig.). Mientras éstos muestran casi en su totalidad la tortura de la deformación craneana artificial, aquel en estado subfósil y que motiva este artículo, no se advierte vestigio alguno de dicho proceso y luego que muestra características anatómicas sensiblemente distintas.

## 2. - El yacimiento

El lugar donde se encuentran los restos humanos está situado a unos 400 metros a la izquierda del camino Internacional a Chile y más o menos a igual distancia del río Uspallata. Ellos se hallaban en la parte alta de unas barrancas de un pequeño río seco pero a unos setenta centímetros de hondura de la superficie del suelo. Casi todos los huesos habían caído a la base de la barran-

ca por efecto de la erosión, pero el lugar exacto me fué fácil averiguarlo por haber recogido los restantes *in situ*. Varios centenares de metros al norte se encuentra un pequeño cerrillo de rodados y en cuya parte superior descubrimos ese mismo día los restos de un Pukará. El examen de toda esa zona, fué sin embargo muy ràpido debido a la niebla y llovizna fría que caía intermitentemente.

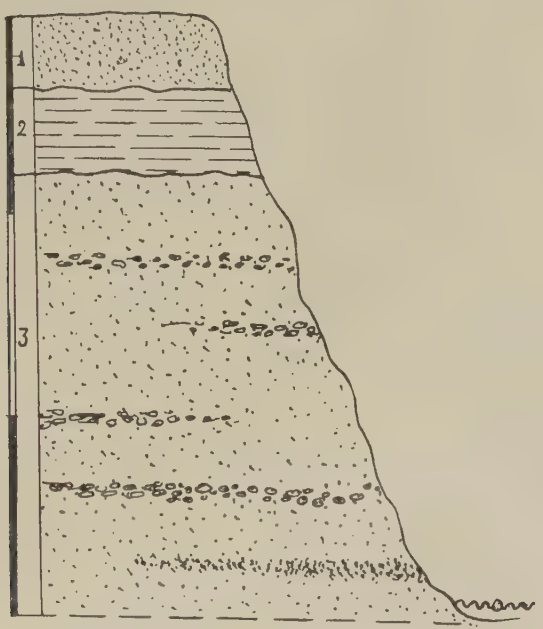


FIG. 1. — Corte geológico obtenido en la margen del río Uspallata y sobre el camino internacional a Chile. Los restos humanos fueron hallados en el espesor de la capa Nº 2.

### 3. - CONDICIONES GEOLÓGICAS

La región del yacimiento humano forma la parte baja del valle de Uspallata y sus terrenos superficiales están constituídos de materiales grisáceos, parduscos, pulvurulentos, alternados con capas de rodados, de arenas, etc. Los cortes geológicos que se obtienen a poca distancia entre si, pueden ser más o menos diferentes por el hecho de que las capas en cuestión aparecen con espesores variables y pueden no existir en lugares muy próximos. De cualquier modo ofrezco un corte obtenido en la proximidad del río Uspa-

llata y sobre el camino Internacional a Chile, distante varios centenares de metros al Oeste del hotel de la localidad (figura 1):

1º de 0 a 0,50 centímetros. Terreno arcilloarenoso pulvurulento, de color grisáceo; contiene cierta cantidad de *humus* y en la parte superior se ven vestigios de alfarerías, esquirlas, etc.

2º de 0.50 a 1 metro. Terreno arcilloso y más liviano en proporción a la masa debido a la presencia de numerosos canalículos radiculares. Tiene una coloración grisácea con tono rojizo. Se encuentra muy estratificado y es de origen palustre. Por su aspecto general, dicha capa semeja mucho al platense de la provincia de Buenos Aires. Los restos humanos los recogí en la parte superior de un terreno muy similar al descripto.

3º de 1,00 a 3,00 metros. Terreno de aspecto loesoide, algo arenoso, de color rojizo claro. En su espesor se ven numerosas camadas de rodados del tamaño de un huevo de gallina, y en otros trechos son depósitos de arena de color rojizo que lo interrumpen.

0, Nivel del río Uspallata que corre allí de N. a S.

## 4. - Descripción

Se trata de un cráneo con su mandíbula y distintos huesos del esqueleto de un individuo fenemino de unos veinte años de edad. pero que fué hallado en numerosos fragmentos. Luego fueron unidos y parcialmente reconstruído el cráneo por el taxidermista del Museo, señor P. Save. Los huesos muestran una coloración amarillo pajiza acercándose a la de los fósiles que se extraen de la parte superior del piso bonaerense de la provincia de Buenos Aires. Sin embargo, considero a dichos restos como de edad un poco más reciente, platense más o menos y desde luego de época holocénica. Pertenecen a la colección del Departamento de Antropología del Museo de Historia Natural «Juan C. Moyano», de Mendoza.

*Vista de lado.* — La frente es bastante abovedada sobre todo en la línea media y mucho más que cualesquiera de los cráneos indígenas recogidos en los túmulos ya citados (figura 2). La parte más prominente del occipucio se encuentra en el opistio.

El perfil facial tiene una perpendicular hacia adelante poco acentuada. Los cigomáticos son relativamente robustos. El contorno general del cráneo semeja mucho más al de Malacara 2, (*Homo sinemento* Amegh.). (Ameghino 1910, p. 1-6; Hrdlicka, 1912, p. 272,

Fig. 2. — Individuo femenino ♀, subfósil, (An. 259) hallado en Uspallata. Excursión Rusconi. Abril 15-1938.

lám. 33), que a otros cráneos de la serie fósil como los de Necochea, La Tigra o los subfósiles de Santiago del Estero (Rusconi, 1935, p. 143, lám. V; Castellanos, 1938).

*Vista de frente.* — Los arcos superciliares son poco aparentes pero la glabela es bastante abultada (figura 3). El borde alveolar avanza poco con respecto al borde inferior de las fosas nasales. Los malares se encuentran avanzados en comparación a muchos cráneos de los túmulos ya recordados. Las fosas orbitales son de figura cuadrangular; el borde superior de la órbita tiene mayor grado de curvatura que en la mayoría de los cráneos indígenas citados, y también con los de Viluco.

*Vista inferior.* — La arcada dental afecta la forma parabólica; su paladar es profundo. Los cóndilos occipitales muestran su forma normal; los agujeros pre y postcondiloideos tienen bastante amplitud. El *foramen ovale* no es muy grande y el *for, spinosum* está parcialmente abierto en el lado de la sutura esfenopetrosa. El *for. magnum* tiene màs longitud que anchura. El proceso y la fosilla faríngea son apenas perceptibles.

*Vista posterior.* — Entre el *torus transversus* y el *lambda* hay una zona plana situada hacia el lado derecho que no puede ser debido a una deformación artificial sino más bien a un caso congénito; pues el cráneo no muestra indicios de haber sido deformado, como ocurre esto último con la mayoría de los cráneos de los túmulos ya mencionados de Uspallata.

*Vista superior.* — El cráneo recuerda la figura brisoide de Sergi (figura 4). Hay además una pequeña asimetría en la zona del occipucio que atribuyo a un caso congénito. No se advierten huesos wormianos fontanelarios y suturales como ocurre por el contrario en casi todos los cráneos deformados de los túmulos de Uspallata y de otros lugares del país.

*Mandíbula.* — Aun cuando el mentón es algo pronunciado, sin embargo, se encuentra detrás de un àngulo recto cuya línea horizontal toca el borde alveolar incisivo y del penúltimo molar. Las protuberancias mentonianas laterales son poco destacadas, pero el borde mentoniano inferior del frente de la sínfisis muestra una cara recta y no curva y en forma de herradura. La incisura le-

FIG 3. — Individuo femenino, subfósil (An. 259), hallado en Uspallata. Exc. Rusconi, Abril 15 de 1938.

murínica está debilmente desarrollada de modo que todo el borde inferior de la mandíbula es casi rectilíneo.

La rama ascendente se encuentra bastante inclinada hacia atrás. Trazando una línea horizontal que corra por debajo de toda la rama, y la otra en sentido perpendicular, que toque, primero con la concavidad anterior de la rama ascendente situada detrás y arriba del último molar; y segundo una línea que coincida con el vertex del *processus coronoideus,* resulta que su abertura es de 133 grados. Esta gran abertura de arco y por consiguiente inclinación hacia atrás de la rama ascendente debe atribuirse en gran parte a la edad del individuo, puesto que ocurre así también con los indígenas descubiertos en los túmulos de Uspallata. Detrás de la apófisis coronoidea se advierte un *proc. rectro-coronoideus* bien manifiesto. El cóndilo mandibular de la rama derecha es algo más corto que el de la opuesta. La protuberancia interna de los referidos cóndilos es siempre màs abultada que la del lado externo. La incisura sigmoidea describe una línea en simicírculo.

Por la cara posterior o interna se advierte que la *fovea sublinguale* no es bien definida y de la *fossa digastrica* hay solamente vestigios. El *proc. geni* tiene 2 milímetros de longitud. La *spina* de *Spix* presenta el vertex truncado y el *sulcus mylohiohydeus* es poco excavado.

*Forámenes craneanos.* — Existe un *supraorbitale* izquierdo y otro derecho; un *foramen infraorbitale* a cada lado; un *for. malaris* izquierdo y dos en el lado derecho; un *for. mastoideus* izquierdo mientras que el del lado opuesto falta por accidente; un *for. postcondyloideus* derecho dentro de la fosa respectiva, mientras que el del lado opuesto falta por accidente.

*Suturas.* — La petroescamosa se halla rota; la infraorbital se encuentra abierta en toda su longitud; la metópica igualmente abierta

FIG. 4. — El mismo individuo (An. 259) visto de arriba

*Medidas de los dientes superiores*

| | | |
|---|---|---|
| Inc. 1. — Diámetro transverso | 8 | m/m. |
| Inc. 2. — Diámetro transverso | 6,5 | » |
| Canino. — Diámetro transverso | 7,5 | » |
| P. 3. — Diámetro anteroposterior | 6, | » |
| Diámetro transverso | 8,4 | » |
| P. 4. — Diámetro anteroposterior | 7, | » |
| Diámetro transverso | 9, | » |
| M. 1. — Diámetro anteroposterior | 10, | » |
| Diámetro transverso | 11, | » |
| M. 2. — Diámetro anteroposterior | 9, | » |
| Diámetro transverso | 10,5 | » |
| M. 3. — Diámetro anteroposterior | 8,5 | » |
| Diámtro transverso | 10, | » |
| Espacio ocupado por toda la dentadura | 57, | » |
| Espacio ocupado por los dos premolares | 13, | » |
| Espacio ocupado por los tres molares | 27,5 | » |

*Dientes inferiores*

| | | |
|---|---|---|
| Inc. 1. — Diámetro transverso | 5, | » |
| Inc. 2. — Diámetro transverso | 6, | » |
| Canino. — Diámetro transverso | 7, | » |
| P. 3. — Anteroposterior | 6,2 | » |
| Transverso | 7, | » |
| P. 4. — Diámetro anteroposterior | 6,2 | » |
| Diámetro transverso | 7,8 | » |
| M. 1. — Diámetro anteroposterior | 10,4 | » |
| Diámetro transverso | 11, | » |
| M. 2. — Diámetro anteroposterior | 10,5 | » |
| Diámetro transverso | 10,2 | » |
| M. 3. — Diámetro anteroposterior . . . . (alvéolo) | | |
| Espacio ocupado por los tres molares | 13, | » |

*Huesos del esqueleto.* — Además del cráneo, he levantado diversos restos del esqueleto del mismo individuo que consisten en: Atlas completo no presenta anomalía digna de ser señalada, como ocurre por el contrario con aquellos procedentes de los túmulos de Uspallata los que en su mayoría muestran anomalías o asimetrías diversas. La amplitud máxima entre los labios externos de las facetas articulares para los cóndilos occipitales es de 45 milímetros, y de solo 41 entre las facetas que articulan con el áxis.

El áxis es normal. Las cinco vértebras cervicales son igualmente normales.

La porción diafisiana del húmero es proporcionalmente muy grácil y bastante recta. Hay trosos de escápulas y otros vestigios óseos de menor importancia aún.

*Medidas craneanas*

| | | |
|---|---|---|
| Longitud basal | 100 | m/m. |
| Diámetro anteroposterior máximo | 170 | » |
| Diámetro anteroposterior iniaco | 168 | » |
| Diámetro transverso máximo | 128 | » |
| Altura basilo bregmática | 115 | » ap. |
| Altura aurículo bregmática | 180 | » |
| Anchura frontal mínima | 91 | » |
| Anchura frontal máxima | 104 | » ap. |
| Diámetro bimastoideo (en el vertex) | 88 | » |
| Diámetro bicigomático | 113 | » ap. |
| Diámetro nasio basilar | 95 | » |
| Diámetro alvéolo basilar | 90 | » |
| Diámetro nasio alveolar | 67 | » |
| Altura nasal | 46 | » |
| Anchura nasal | 19 | » |
| Anchura interorbitaria | — | » |
| Anchura orbitaria | 38 | » |
| Altura orbitaria | 36 | » |
| Diámetro naso-sinfisio | 100 | » |
| Flecha de la curva alveolar | — | » |
| Longitud de la bóveda palatina | — | » |
| Anchura de la bóveda palatina | 43 | » |
| Altura órbito alveolar | 37 | » |
| Longitud del foramen occipital | 30 | » |
| Ancho del foramen occipital | — | » |
| Curva sagital | 345 | » |
| Curva transversal | 288 | » |
| Curva horizontal | 477 | » |
| Capacidad cúbica | — | » |

*Medidas mandibulares*

| | | |
|---|---|---|
| Anchura bicondílea | 110 | » |
| Anchura bigoníaca | 84 | » |
| Longitud de la rama ascendente | 52 | » |
| Anchura mínima de la rama ascendente | 30 | » |
| Anchura máxima de la rama ascendente | 37 | » |
| Altura sinfisiana | 34 | » |
| Altura del cuerpo mandibular (debajo mol. 2) | 21 | » |
| Espesor máximo del cuerpo mandibular | 17 | » |
| Grados del ángulo mandibular | — | » |

| | |
|---|---|
| Indice craneal . . . . . | 75,2 » |
| » facial total . . . . . | 97,3 » |
| » facial superior . . . . . | 59,2 » |
| » orbitario. . . . . | 94,71 » |
| » nasal . . . . . | 41,30 » |

De acuerdo a los índices indicados, el cráneo humano subfósil tiene las siguientes características: Es dolicocéfalo con tendencia a subdolicocéfalo por su índice craneal. Es Hiperleptoprosopo, por su índice facial total. Mesoseno por su índice facial superior. Hipsiconco o megacemo por su índice orbitario y Leptorrino por su índice nasal.

## BIBLIOGRAFIA


AMEGHINO, F., *Descubrimientos de dos esqueletos humanos fósiles en el pampeano inferior del Moro,* en *Congreso Científico Internacional Americano,* pp. 16, Buenos Aires, 1910.

CASTELLANOS, A., *Nuccos restos del hombre fósil y de Hornos de tierrra cocida en Santiago del Estero,* en *Publicaciones del Inst. de Fisiología y Geología,* pp. 1-33, Rosario, 1938.

HRDLICKA, A.,*Early Man in South America,* en *American Etnology,* Bull. 52, Wáshington, 1912.

RUSCONI, C., *Restos humanos fósiles procedentes de la provincia de Santiago del Estero,* en *Revista Argentina de Paleontología y Antropología,* vol. I, pp. 135-161, Buenos Aires, 1935.

RUSCONI, C., *Viajes arqueológicos por Uspallata,* en *Revista Geográfica Argentina,* vol. X, nº 60, pp. 203-206, Buenos Aires, 1938.

# UNA POSIBLE INFLUENCIA ANTROPÓGENA SOBRE EL AUMENTO DE LA NUBOSIDAD

Por el Dr. WALTER KNOCHE

Para la formación de nubes se requiere no solamente un estado de saturación o, generalmente de sobresaturación, sino también la existencia de núcleos de condensación. El grado de la sobresaturación, — en la mayoría de los casos menos de 10 % — depende aproximadamente del tamaño de los iones, respectivamente de las partículas, y naturalmente también de su constitución: la condensación del vapor se determina a veces por el aumento de la tensión de vapor sobre una superficie curva, y otras veces por la disminución de la presión del vapor de la substancia diluída.

Lo que nos interesa en este estudio, no es tanto la parte física del fenómeno sino más bien el aspecto geográfico, es decir el origen de los núcleos de condensación. Hasta hace poco, se aceptó que los núcleos de condensación en su gran mayoría se formaban sobre la superficie de los océanos. W. Findeisen (1) hizo resaltar que estas partículas no son partículas de sal oriundas del mar, sino que generalmente tienen origen terrestre. Los recuentos que se efectuaron a bordo y en las costas, han comprobado que el número de núcleos fué tanto mayor, cuanto más tiempo el viento había pasado por la superficie del agua. Además la cantidad absoluta de núcleos sobre el océano llegó en un caso dado hasta solamente 2 por $cm^3$ cuando en un aire puro (2) continental siempre existen algunos miles de partículas que cerca de regiones industriales aumentan a varios cientos de miles.

Los núcleos de condensación son generalmente substancias higroscópicas y algunas veces líquidas (p. e. $SO_4$) que de por sí ya absorbe agua con humedades relativas más bajas que 100 %.

Pero si existe un estado de sobreenfriamiento, éstas partículas líquidas de substancias que disminuyen el punto de congelación, no pueden provocar una sublimación de agua, es decir la formación

de hielo. En este caso se necesitan como núcleos de condensación, partículas sólidas. Estas, sin considerar el polvo de meteoritos, deben tener un origen terrestre, es decir, un polvo finísimo (arena, cristales de cuarzo) (3).

Findeisen observa con razón que por lo menos en Europa los núcleos de condensación, esenciales para la formación de nubes, tienen su origen en los procesos de la combustión industrial, los que producen una cantidad extraordinariamente grande de tales partículas. Así existe efectivamente una influencia antropógena. Esta influencia realmente debe aceptarse con mayor convicción y — no solamente para la Europa — sino para casi todos los continentes sin tomar en cuenta el transporte sobre largas distancias por el mismo movimiento de las masas aéreas. Se ha observado que p. e. los productos de la combustión de las algas para la fabricación del iodo, fueron transportados por el viento desde las costas de la Bretaña hasta la Europa central (4). Cuando estas fábricas dejaron de existir en la costa francesa, se observó en Alemania un empobrecimiento marcado del suelo y del pasto, en su contenido de iodo y hasta en las glàndulas tiroides del ganado. Así el hombre tuvo una influencia preponderante sobre el clima iódico.

Ahora bien, que no solamente la industrialización y ante todo el tráfico motorizado, hace progresos en casi todas las zonas de la tierra y que en todas partes existe por lo menos la combustión para el uso doméstico, debemos considerar también los incendios de bosques y de estepas; éstos producen aproximadamente la misma cantidad de partículas higroscópicas no solamente líquidas sino también sólidas (hollín, ceniza) (5). En total se producen por combustión en la tierra anualmente más o menos fuera de 8000 millones de toneladas de $CO_2$, 2 mil millones de agua (o mejor dicho de soluciones débilmente ácidas) y 70 millones de elementos sólidos (6). No solamente los núcleos de condensación tienen generalmente un origen antropógeno, sino en parte las partículas sólidas de sublimación. Los incendios intencionales de la vegetación arriba mencionados, junto con un pastoreo excesivo del ganado y la agricultura, ante todo en forma de monocultura industrial, han llevado en escala progresiva a la estepización y al desierto vastas zonas de la tierra en todos sus continentes.

La influencia del hombre sobre la denudación, respectivamente sobre el aumento de la fuerza del viento y el transporte de las suspensiones ha sido observado en forma drástica en los EE. UU. (7). En menos de 15 años la erosión por el viento ha destruído la tierra

del « Middle West » a pesar que los « Great Plains » pertenecen solamente a las zonas semi-áridas de la Tierra. Teniendo presente que el mismo Sahara tiene en parte un origen antropógeno (8) y que el Harmattan del Sudán y los alisios del desierto transportan hasta distancias enormes (Mar Obscuro del Atlántico) el polvo de cuarzo junto con las cenizas de los incendios de sabanas se debería reconocer que el hombre es un productor potente en forma directa o indirecta, de los suspensoides que se encuentran en la atmósfera.

Siendo los núcleos de condensación o de sublimación un factor importantísimo para la formación de nubes, y hasta cierto punto de las mismas precipitaciones, debemos admitir que en mayor escala aún de lo que Findeisen indica, el hombre debe tener en forma acelerada una influencia bien marcada sobre el estado coloidal de la atmósfera, el aumento de la nubosidad y de las precipitaciones.

Esta influencia antropógena naturalmente se combina con la macroclimática; pero aceptamos con Gillman (9) que el efecto humano es màs importante que el efecto macroclimático. Debido a la brevedad de las observaciones metereológicas no es posible de apreciar en forma exacta la actuación del hombre sobre los acontecimientos de la naturaleza. Sabemos que existe una periodicidad de más largos y de más cortos intervalos en la historia del clima. Pero solamente debemos recordar el hecho de que el hombre presenta una « singularidad » en la historia de nuestro planeta.

## BIBLIOGRAFIA

(1) Wilhelm Findeisen, *Entstehen die Kondensationskerne an der Meeresoberflaeche? Met. Ztschr. H.* 7, 1937, pp. 377-379.

(2) A. Wigand,, *Ann. d. Hydr. u. mar. Met.* 58, 212, 1930.

(3) W. Findeisen, *Die kolloidmetereologischen Vorgaenge bei der Niederschlagsbildung. Met. Ztschr. H.* 4, 1938, pp. 121-133.

(4) H. Cauer, *Chemisch-bioklimatische Studien in der Bretagne. Ref. Biokl. Beibl. H.* 1, 1938, p. 40. (*Biochem. Ztsch.*, 1937, p. 186).

(5) W. Knoche, *Der Einfluss von Vegetationsbraenden auf die Witterung. Met. Ztschr. H.* 7, 1937, pp. 244-257.

(6) W. Knoche, *Algunos apuntes sobre la producción del anhidridocarbónico antropógeno. An. de la Soc. Cient. Arg.* julio 1938, pp. 41-46.

(7) Major R., A. Bagnold, *The transport of sand by wind. The Geogr. Journ.* May 1937, p. 422.

(8) W. Knoche, *Die Entstehung der Wueste Sahara, Forsch, un Fortsrhr.* Nº 2, 1936.

(9) C. Gillman, *Die vom Menschen beschleunigte Austrocknung von Erdraeumen. Ztschr. d. Ges. f. Erdk. z.* Berlín, H. 3-4, 1937

# BIBLIOGRAFIA

FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

Por C. C. D.

*Actualités Scientifiques et Industrielles.* Folletos (16 1/2 cm × 25 1/2 cm) editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos recibidos, siguiendo la numeración consecutiva.

N° 552 y 585. — Hostelet (Georges), *Les Fondements expérimentaux de l'Analyse Mathématique des Faits Statistiques. Le Concours de l'Analyse Mathématique à l'Analyse expérimentale des Faits Statistiques.* 2 folletos de 70 páginas cada uno; precio, 15 francos cada uno; 1937.

Fascículos II y III de la serie titulada « Le Progrès de l'Esprit » dirigida por León Brunschwicg, miembro de la Academia de Ciencias Morales y Políticas; Profesor de la Facultad de Ciencias de París; El autor es profesor de la Facultad del Hainaut y ex director del Instituto de Sociología de Bruselas.

El primero de estos folletos trae, desarrollada, una exposición hecha en el Instituto Internacional de Estadística, en su sesión tenida en Atenas. La primera parte se refiere a los fundamentos: caracteres de los hechos estadísticos y sus índices numéricos; el concurso de las matemáticas al análisis de dichos hechos; los modos de producción de éstos y las nociones correlativas de causalidad y de contingencia. La segunda parte trata la Causalidad, Probabilidad y Azar. Al final trae las Conclusiones. Dice que mucho han de desear los estadísticos que los matemáticos se esfuercen en explicar las condiciones que deben realizar los hechos estadísticos, para que el empleo de tal o cual fórmula de estadística matemática sea experimentalmente legítima.

El segundo folleto reproduce y completa las respuestas dadas por el autor a las objeciones u observaciones que le fueran formuladas a las tesis sostenidas en el primer folleto. Completa, pues, a éste, sin exigir, imperiosamente, la lectura del mismo.

Está también dividido en dos partes: la primera trata la deficiente discriminación de las diligencias del espíritu científico, sus caracteres y resultados. La otra parte se extiende sobre la insuficiente discriminación, y elaboración ficticia de las ideas afectadas a los hechos.

N° 562. — Cabrera (B.), *Dia et Paramagnétisme et Structure de la Matière.* 80 páginas; 20 francos; 1937.

Fascículo I de la serie « Exposés sur la Théorie de la matière », dirigida por el autor, director del Instituto Nacional de Física y Química de Madrid.

El autor presenta el cuadro de las ideas que han servido de guía a sus trabajos personales sobre el tema, así como al de sus colaboradores.

En una introducción recuerda los fundamentos teóricos de la configuración del átomo, y la vinculación entre la configuración electrónica de los diversos átomos y el paramagnetismo; luego, en dos capítulos, el diamagnetismo y el paramagnetismo. Trae, por último, la bibliografía del tema.

N° 563. — La Barre (Jean), *Les Régulations Hormonales du Métabolisme Glucidique.* Un folleto de 92 páginas; 20 francos; 1937.

Constituye el n° VIII de la serie « Nutrition », dirigida por Emilio F. Terroine. El autor es profesor de la Facultad de Medicina de Bruselas.

Después de recordar, en una introducción, las causas extra endocríneas de las perturbaciones glicémicas (pues tanto en el hombre como en lo animales la concentración del azúcar en la sangre puede variar por la influencia de numerosos factores, de suerte que deben tenerse en cuenta los fenómenos de absorción y eliminación que en las condiciones fisiológicas pueden intervenir para modificar la glícero regulación), entra el autor en materia desarrollando el tema en nueve capítulos y una bibliografía nutrida; y así se ocupa sucesivamente de: la constante glicémica del medio humoral; las glándulas endocríneas que intervienen en la regulación glicémica; el páncreas, la glándula tiroide, las glándulas paratiroideas, la hipófisis y las glándulas genitales, en la regulación glicémica.

Unas consideraciones generales preceden la bibliografía.

N° 565. — Hachtroudi Moshen, *Les Espaces d'Elements à conexion projective normale.* 85 páginas; 20 francos; 1937.

El autor es doctor en ciencias. Cartan ha demostrado que la noción de un espacio de elementos lineales de conexión proyectiva normal puede definir las invariantes puntuales de una ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$, de segundo orden, problema que, así planteado, viene a ser una geometrización de una ecuación diferencial general de segundo orden.

En este folleto el autor busca generalizar el problema tratado por Cartan. Así lo expresa en una Introducción. Después de lo cual desarrolla su trabajo en tres capítulos: el primero trata los espacios de elementos planos de tres discusiones; el segundo, el caso del espacio puntual, y el tercero los espacios de elementos planos de $n$ dimensiones y los espacios no-holónomos. Termina con un índice bibliográfico.

N° 569. — Juenehomme (W.), *Calculs des Equilibres physico-chimiques, à l'acide des données de la spectroscopie.* 92 páginas; 20 francos; 1937.

Es el fascículo XIII de « Exposés de Physique moléculaire », dirigida por Victor Henri, profesor de la Universidad de Lieja.

El autor se propone poner los progresos de la espectroscopia al alcance de los prácticos de laboratorio o de la industria; al efecto, recuerda las nociones clásicas de la termodinámica, con numerosos ejemplos, algunos de ellos calculados *in extenso*. Para los especialistas se detiene sobre los principios del método, y principales dificultades que suelen surgir; y también sobre la generalización hecha a las moléculas orgánicas, realizada en trabajos recientes.

Justifica ese programa recordando que la espectroscopía permite actualmente la completa resolución de problemas prácticos entre los cuales el cálculo de los equilibrios en fase gaseosa.

El libro contiene una introducción, seis capítulos, cuatro apéndices, una bibliografía y una tabla de las notaciones empleadas. Los seis capítulos se ocupan respectivamente de: Recuerdo de nociones de termodinámica; generalidades sobre el método estadístico; relaciones generales de los gases perfectos, hidrógeno y sus isótropos, suma de estados de diversos átomos y moléculas, crítica de la 3ª ley de la termodinámica.

N° 570. — Valiron (Georges), *Sur les Valeurs exceptionelles des Fonctions méromorphes et des leurs dérivées.* 55 páginas; 18 francos; 1937.

Constituye el fascículo IX de la serie « Exposés sur la théorie des fonctions », dirigida por Paul Montel.

Después de una Introducción explicativa del objeto de este estudio — que comporta una demostración del llamado « teorema de Miranda », presentado bajo un nuevo aspecto, así como una completa demostración de los resultados del autor y de ciertas generalizaciones debidas a Chi Tai Cuang — el profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Paris Georges Valiron entra en materia y hace su exposición en cinco capítulos que se ocupan, respectivamente, de las nociones sobre las familias normales; método de Miranda; teorema general sobre el comportamiento de una función holomorfa en un círculo; generalizaciones del teorema de Schottky, caso de las funciones holomorfas; y, finalmente, el caso de las funciones holomorfas y extensiones diversas.

N° 571. — Vasilesco (Florin), *La Notion de Capacité.* 52 páginas; 15 francos; 1937.

Es el fascículo X de la serie indicada en la noticia que precede. El autor es profesor en Montpellier. Trata, sucesivamente, los siguientes temas:

La noción clásica de capacidad y su extensión por Wiener; generalización de La Vallée Poussin. Definiciones geométricas de Fekete, Polya y Sezqo; extensión de la noción a potenciales generalizados por Frostman; estudio de la noción por La Vallée Poussin. Conjuntos de capacidad nula; propiedades características. Bibliografía.

Precede una Introducción, de la que transcribimos algunos párrafos:

« La noción de capacidad es una extensión de la clásica de *capacidad electrostática de un conductor*, hecha a los conjuntos de puntos; extensión que ha podido realizarse mediante el problema de Dirichlet. Es fundamental para el Análisis, y gracias a ella ha sido posible obtener resultados de finitivos concernientes al estudio de la solución del problema de Dirichlet generalizado, en la frontera del dominio dentro del cual ha sido definido; de las singularidades de las funciones armónicas; de la unicidad de esas funciones, de la extensión del método llamado « del barrido » en el caso de los dominios los más generales cuando se da una repartición de masa general, la función de Green según la primera concepción de éste como potencial de masas, las funciones de variable compleja, etc. ».

N° 574. — Bedeau (F.), *Théorie et Technique du Bruit de Fond (effets schottky et thermique)*. 95 páginas con figuras; 25 francos; 1937.

Es el fascículo I de la serie « Radioéléctricité » (telecomunicaciones y televisión) dirigida por el autor, jefe de trabajos en la Facultad de Ciencias de París.

Después de una Introducción entra el profesor Bedeau en materia. En la primera parte del trabajo trata la teoría del ruido de fondo; en la segunda trata la práctica del mismo.

Es sabido que aun cuando un poste receptor de ondas radioeléctricas esté encerrado dentro de una jaula de Faraday y que ninguna señal esté aplicada en los límites del circuito de entrada, el alto parlante deja oír una especie de zumbido confuso: es el ruido de fondo. Se trata de determinar la causa del mismo, y a ello se esfuerza el autor. Al final, una bibliografía.

Nos. 576 y 577. — Giaja (J.), *Homéothermie et Thermorégulation*. Dos folletos de unas 70 páginas cada uno y algunas figuras; 15 francos cada uno; 1938.

Fascículos IX y X de la serie « Nutrition », dirigida por Emilio F. Terroine, profesor de la Facultad de Ciencias de Estrasburgo, director del Instituto de Fisiología general. El autor es profesor de la Universidad de Belgrado.

El primer tomo está consagrado a la homeotermia. Homeotermos son los animales que conservan temperatura constante. En la primera parte de este primer folleto, el autor se ocupa del significado de la homootermia, del medio térmico, del nivel de la temperatura de estos homeotermos, de la temperatura crítica inferior y superior, y del campo de acomodación. La segunda parte se ocupa de metabolismo basal.

El segundo tomo se ocupa de la termorregulación: química, física. El metabolismo químico, y la termorregulación; el alcohol y la termogénesis, la termorregulación y la ontogenia, las perturbaciones de la termorregulación, y otros tópicos por el estilo, así como la bibliografía, son las materias de los capítulos subsiguientes.

N° 578. — Vallée Poussin (C. de la), *Les Nouvelles Méthodes de la Théorie du Potentiel et le problème généralisé de Dirichlet.* 48 páginas; 15 francos; 1937.

Se trata del fascículo II de la serie de Publicaciones del Instituto Matemático de la Universidad de Estrasburgo.

Una introducción se refiere al problema simple de Dirichlet y al método llamado de la barredura o « del barrido »; luego al problema generalizado del mismo Dirichlet. Trata luego las funciones de conjunto e integral generalizada de Stieltjes; luego el potencial newtoniano; la Capacidad: capacidad nula, teoremas de unicidad. Signo de la integral de energía. El principio del número. El barrido. Los puntos irregulares y el problema generalizado de Dirichlet. Por último, el ensanchamiento de las condiciones de continuidad en la frontera.

N° 579. — Randoin (Lucie), *Vues actuelles sur le Problème de l'alimentation, avec Tables de Composition des aliments.* 130 páginas; 25 francos; 1937.

La autora es doctora en ciencias y directora del Laboratorio de Fisiología de la Nutrición en la « Ecole pratique de Hautes-Etudes », etc.

Las tablas que agrega, traen el tenor en sustancias energéticas, en elementos minerales y en vitaminas de las sustancias alimenticias así como los valores y el sentido del equilibrio « acidez-alcalinidad », y los valores de la relación calcio-fósforo. Estas tablas ocupan unas 50 páginas del texto. Lo restante de éste, después de una Introducción, trae los datos fisiológicos actuales del problema de la alimentación: necesidades de principios energéticos o no, sustancias elementales fundamentales, específicamente indispensables; el equilibrio alimenticio; la alimentación de otrora; la del final del siglo XIX y principios del XX; la alimentación en la actualidad; la orientación actual de las ideas en la higiene alimenticia, y la creciente preocupación por la salud pública. Al final, unas conclusiones y la bibliografía del tema. En aquéllas, observa que el ideal de la higiene alimenticia actual es unir los pueblos en el común deseo de suprimir el hambre, hacer retroceder los sufrimientos y obtener una armonía general en todas las manifestaciones del esfuerzo humano.

# INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO VIGÉSIMO SEXTO


PAG.

JUAN CARLOS VIGNAUX. — Sobre integrales dobles de Laplace y de Stieltjes asintóticas . . . . . 1

FRANCISCO LA MENZA. — Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos (*Conclusión*) . . . . . 19 y 241

CARLOS RUSCONI. — Sobre ejemplares juveniles del género « Scelidotherium » . . . . . 33

WALTER KNOCHE. — Algunos apuntes sobre la producción del anhidrido carbónico antropógeno . . . . . 41

MAURICIO DURRIEU. — Cotejos económicos y selección económica (*Conclusión*) . . . . . 47

ALBERTO M. SALAS. — Breve ensayo sobre Don Pedro de Cieza de León y los caracteres de la Conquista Incaica (*Continuación*) . . . . . 67 y 301

J. C. VIGNAUX. — Series simples y dobles de Dirichlet y de facultad asintóticas . . . . . 97

ADOLFO T. WILLIAMS. — Tablas de las líneas últimas . . . . . 131 y 188

J. C. VIGNAUX. — Sobre la transformada de Beltrami-Poincaré y la generalización de la fórmula de Riemann . . . . . 161

GUSTAVO A. FESTER. — La Cordillera Payne . . . . . 215

CARLOS A. RUSCONI. — Sobre varios restos de osos de la fauna ensenadense 227

JUAN SABATO y ROGELIO MC LOUGHLIN. — Medida de pequeñas variaciones de grandes tensiones e intensidaddes de corriente . . . . . 251

VIRGILIO TEDESCHI. — La fuerza electromotriz de polarización y el potencial químico del hidrógeno y oxígeno atómicos . . . . . 269

AUGUST BUSCK. — A new woodboring lepidopteron, injurious to fruit trees in Argentina . . . . . 280

DR. A. CROS. — Cissites maculata Swederus (Col. Meloidae) Sa larve primaire . . . . . 285

JUAN C. VIGNAUX. — Extensiones del teorema de Abel-Stolz y sobre algunas transformaciones lineales . . . . . 321 y 401

EDGARD E. BLANCHARD. — Descripciones y anotaciones de dípteros argentinos . . . . . 345

OSCAR MONTE. — Sobre tingitídeos de la Argentina . . . . . 387

KENNETH J. HAYWARD. — Esperioidea Argentina VIII . . . . . 429

CARLOS RUSCONI. — Restos humanos subfósiles de Mendoza . . . . . 460

WALTER KNOCHE. — Una posible influencia antropógena sobre el aumento de la nubosidad . . . . . 471

479

Pag.

SECCION SANTA FE de la Sociedad Científica Argentina:
*Sección de comunicaciones* del 21 de Junio de 1938 . . . . . 85
J. Gollan (h.) y O. Mallea. — Determinación de la capacidad de adsorción y bases intercambiales en los suelos. . . . . 85
Víctor S. Nicollier. — Límite líquido en suelo. - Comparación . . . . 85
Gregorio Kleer. — Algunas rocas de Tierra del Fuego. . . . . 86
Gustavo A. Fester. — La Cordillera Darwin . . . . . 87
José Cruellas y R. Valetto. — Dosaje del manganeso con la formaldoxina . . . . . 89
*Ciclo de conferencias.* — Conferencia del Dr. Joaquín Frenguelli: Qué son y para qué sirven las diatomeas . . . . . 91

VARIAS

Sociedad Científica Argentina. — Sexagésimo sexto aniversario . . . 81
Discurso del señor Presidente Ing. J. W. Dobranich . . . . . 82
Homenaje al Profesor Darmois . . . . . 393

NECROLOGÍA

José S. Corti. — Nota necrológica . . . . . 153
Sepelio del Dr. Ignacio Aztiria:
Palabras del Dr. Claro C. Dassen . . . . . 396
Palabras del Ing. Emilio Rebuelto . . . . . 397

BIBLIOGRAFÍA

C. C. D. . . . . 155, 238, 318 y 474
E. R. . . . . 238